Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne

26 – 28 sierpnia 2020

(Pierwszy dzień – 26 sierpnia 2020)

1. Niech $ABCD$ będzie równoległobokiem, którego przekątne przecinają się w punkcie P. Oznaczmy przez M środek odcinka AB. Niech Q będzie takim punktem, że prosta QA jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie MAD oraz QB jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie MBC. Udowodnić, że punkty Q, M i P są współliniowe.

2. Dla danej liczby całkowitej n powiemy, że liczba rzeczywista x jest $n-$*dobra*, jeśli istnieje n liczb całkowitych dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniających równość

$$x = \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}.$$

Znaleźć wszystkie liczby całkowite dodatnie k, które spełniają warunek:

Jeśli a, b są takimi liczbami rzeczywistymi, że przedział domknięty $[a, b]$ zawiera nieskończenie wiele liczb $2020-$ dobrych, to zawiera on przynajmniej jedną liczbę $k-$dobrą.

3. Liczby $1, 2, \ldots, 2020$ są zapisane na tablicy. Tomek i Adam grają w następującą grę. Na początku Tomek łączy odcinkiem takie dwie liczby, że jedna z nich dzieli drugą. Następnie Adam łączy odcinkiem dwie liczby, które nie były wcześniej połączone oraz jedna z nich dzieli drugą. Wykonują oni takie ruchy na przemian, do momentu, w którym utworzy się trójkąt o wierzchołku 2020 (to znaczy 2020 jest połączone z pewnymi dwiema liczbami, które również są ze sobą połączone). Grę wygrywa osoba, która narysuje ostatni odcinek (utworzy opisany trójkąt). Który z graczy ma strategię wygrywającą?

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut
Każde zadanie jest warte 7 punktów

Language: Polish

Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne

26 – 28 sierpnia 2020

(Drugi dzień – 27 sierpnia 2020)

4. Niech α będzie daną liczbą rzeczywistą. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla każdej pary liczb rzeczywistych x, y warunek

$$(x+y)(f(x)-f(y)) = \alpha(x-y)f(x+y).$$

5. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią oraz niech $d(n)$ oznacza liczbę uporządkowanych par liczb całkowitych dodatnich (x, y) spełniających równość

$$(x+1)^2 - xy(2x - xy + 2y) + (y+1)^2 = n.$$

Wyznaczyć najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią n, dla której $d(n) = 61$.

6. Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym. Niech P będzie punktem przecięcia się prostych stycznych do okręgu opisanego na trójkącie ABC w punktach B, C. Wybieramy takie punkty X, Y na prostych odpowiednio AB, AC, że $\angle XPY = 2\angle BAC$ oraz punkt P leży wewnątrz trójkąta AXY. Niech Z będzie odbiciem punktu A względem prostej XY. Wykazać, że okrąg opisany na trójkącie XYZ przechodzi przez pewien stały punkt, niezależny od wyboru punktów X, Y.

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut
Każde zadanie jest warte 7 punktów

Language: Polish