LXXV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

1. Dany jest prostokąt $ABCD$ i punkt X leżący w jego wnętrzu. Dwusieczne kątów DAX oraz CBX przecinają się w punkcie P. Punkt Q spełnia równości $\sphericalangle QAP = \sphericalangle QBP = 90°$. Udowodnić, że $PX = QX$.

Autor zadania: Daniel Goc

Rozwiązanie: Oznaczmy $\sphericalangle PAD = \varphi$ i $\sphericalangle CBP = \psi$. Mamy $\sphericalangle BAP = 90° - \varphi$ i $\sphericalangle PBA = 90° - \psi$, więc $\sphericalangle APB = 180° - \sphericalangle BAP - \sphericalangle PBA = \varphi + \psi$. Ponieważ $\sphericalangle QAP = \sphericalangle PBQ = 90°$, więc odcinek PQ jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABP. Oznaczmy środek tego okręgu przez R. Wtedy R jest środkiem odcinka PQ. Jeśli $X = R$, to teza zachodzi. Od teraz przyjmijmy, że $X \neq R$ i przyjmijmy bez straty ogólności, że X leży po tej samej stronie prostej PQ co A. Wystarczy udowodnić, że $\sphericalangle XRQ = 90°$, gdyż wyniknie stąd, że X leży na symetralnej odcinka PQ.

Z zależności między kątem wpisanym i kątem środkowym opartymi na tym samym łuku otrzymujemy $\sphericalangle ARB = 2\sphericalangle APB = 2\varphi + 2\psi$. Z drugiej strony

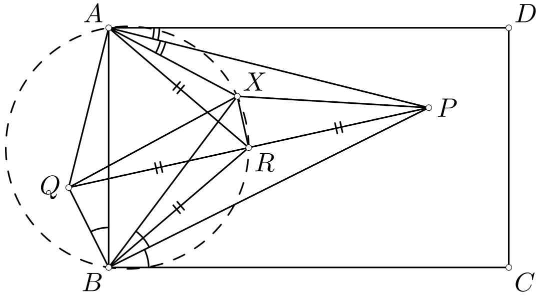
$$\sphericalangle AXB = 180° - \sphericalangle BAX - \sphericalangle XBA = \\ = 180° - (90° - 2\varphi) - (90° - 2\psi) = 2\varphi + 2\psi.$$

Zatem $\sphericalangle AXB = \sphericalangle ARB$, więc punkty A, X, R, B leżą na jednym okręgu.

Mamy $\sphericalangle ABQ = 90° - \sphericalangle PBA = \sphericalangle CBP = \psi$. W takim razie

$$\sphericalangle XRQ = \sphericalangle XRA + \sphericalangle ARQ = \sphericalangle XBA + 2\sphericalangle ABQ = 90° - 2\psi + 2\psi = 90°,$$

co kończy dowód.



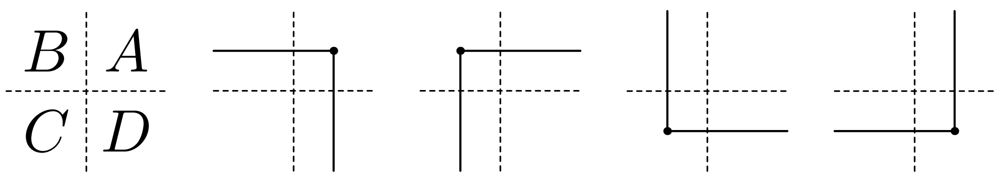
2. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Bolek rysuje $2n$ punktów na płaszczyźnie, z których żadne dwa nie wyznaczają prostej pionowej ani poziomej. Następnie Lolek dla każdego z tych $2n$ punktów rysuje dwie półproste o początku w tym punkcie, z których jedna jest pionowa, a druga pozioma. Lolek chce zrobić to w taki sposób, by narysowane półproste podzieliły płaszczyznę na jak najwięcej obszarów. Wyznaczyć największą liczbę całkowitą k taką, że Lolek może uzyskać co najmniej k obszarów niezależnie od położenia punktów wybranego przez Bolka.

Autor zadania: Łukasz Bożyk

Rozwiązanie: Parę półprostych o wspólnym początku, z których jedna jest pionowa, a druga pozioma, nazywać będziemy *elką*. Uzasadnimy najpierw, że po narysowaniu ℓ elek, które wyznaczają parami różne proste, liczba obszarów, na które została podzielona płaszczyzna jest o $\ell + 1$ większa niż liczba punktów przecięcia elek. Jeśli nie narysowano ani jednej elki, to mamy zero punktów przecięcia elek oraz jeden obszar. Ponadto dorysowanie każdej kolejnej elki powiększa liczbę obszarów o jeden więcej niż liczbę punktów przecięcia elek. Stąd wynika, że po narysowaniu ℓ elek liczba obszarów jest o $\ell + 1$ większa od liczby punktów przecięcia elek.

Udowodnimy, że odpowiedzią na pytanie postawione w treści zadania jest $k = 2n^2 + 2n + 1$. Zgodnie z obserwacją poczynioną w poprzednim akapicie wystarczy udowodnić, że $k' = 2n^2$ jest największą taką liczbą, że niezależnie od położenia punktów narysowanych przez Bolka, Lolek może uzyskać co najmniej k' punktów przecięcia elek.

Niech S będzie zbiorem punktów wybranych przez Bolka. Niech O będzie takim punktem, że prosta pozioma przechodząca przez O rozcina płaszczyznę na dwie półpłaszczyzny, z których każda zawiera po n punktów ze zbioru S oraz prosta pionowa przechodząca przez O również ma tę własność. Te dwie proste dzielą płaszczyznę na cztery ćwiartki, które oznaczymy tak jak na rysunku.



Udowodnimy, że jeśli Lolek narysuje półproste pionowe w dół dla punktów w ćwiartkach A i B, półproste pionowe w górę dla punktów w ćwiartkach C i D, półproste poziome w prawo dla punktów w ćwiartkach B i C oraz półproste poziome w lewo dla punktów w ćwiartkach A i D, to uzyska on co najmniej $2n^2$ punktów przecięcia. Załóżmy, że w ćwiartce A znajduje się a punktów ze zbioru S. Wówczas w ćwiartkach B i D znajduje się po $n-a$ punktów ze zbioru S, a w ćwiartce C znajduje się a punktów ze zbioru S. Zauważmy, że:

- dowolne dwie elki wyznaczone przez parę punktów w przeciwległych ćwiartkach przecinają się w dokładnie dwóch punktach,
- dowolne dwie elki wyznaczone przez parę punktów w sąsiadujących ćwiartkach przecinają się w dokładnie jednym punkcie.

Mamy dwie pary przeciwległych ćwiartek: (A, C) oraz (B, D). Wyznaczają one łącznie $2a^2 + 2(n-a)^2$ punktów przecięcia. Mamy cztery pary sąsiadujących ćwiartek: (A, B), (B, C), (C, D) oraz (D, A). Każda z nich wyznacza $a(n-a)$ punktów przecięcia. Zatem liczba punktów przecięcia wszystkich elek wynosi co najmniej

$$2a^2 + 2(n-a)^2 + 4a(n-a) = 2(a + (n-a))^2 = 2n^2.$$

Teraz wykażemy, że jeśli Bolek narysuje punkty o współrzędnych

$$(1, 1), (2, 2), (3, 3), \ldots, (2n, 2n),$$

to Lolek może uzyskać co najwyżej $2n^2$ punktów przecięcia elek. Podzielmy zbiór elek narysowanych przez Lolka na cztery zbiory: niech A będzie zbiorem elek skierowanych w lewo i w dół, B zbiorem elek skierowanych w prawo i w dół, C zbiorem elek skierowanych w prawo i w górę, a D zbiorem elek skierowanych w lewo i w górę. Zauważmy, że:

- każde dwie elki ze zbioru A są rozłączne,
- każde dwie elki ze zbioru B przecinają się w jednym punkcie,
- każde dwie elki ze zbioru C są rozłączne,
- każde dwie elki ze zbioru D przecinają się w jednym punkcie,
- każda elka ze zbioru A przecina każdą elkę ze zbioru $B \cup D$ w co najwyżej jednym punkcie,
- każda elka ze zbioru A przecina każdą elkę ze zbioru C w co najwyżej dwóch punktach,

- każda elka ze zbioru B przecina każdą elkę ze zbioru C w co najwyżej jednym punkcie,
- każda elka ze zbioru B jest rozłączna z każdą elką ze zbioru D,
- każda elka ze zbioru C przecina każdą elkę ze zbioru D w co najwyżej jednym punkcie.

Oznaczmy moce zbiorów A, B, C, D odpowiednio przez a, b, c, d. Wówczas $a+b+c+d=2n$, a liczba uzyskanych punktów przecięcia nie przekracza liczby

$$T=\binom{b}{2}+\binom{d}{2}+ab+ad+2ac+bc+cd.$$

Ponieważ

$$\binom{b}{2}\leqslant\frac{b^2}{2},\qquad\binom{d}{2}\leqslant\frac{d^2}{2},\qquad ac\leqslant\frac{a^2+c^2}{2},\qquad 0\leqslant bd,$$

więc

$$T\leqslant\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}+ab+ac+ad+bc+bd+cd=\frac{(a+b+c+d)^2}{2}=2n^2,$$

co pokazuje, że Lolek może uzyskać co najwyżej $2n^2$ punktów przecięcia elek.

3. Wyznaczyć wszystkie pary liczb pierwszych (p,q) o następującej własności: istnieją dodatnie liczby całkowite a,b,c spełniające równości

$$\frac{p}{a}+\frac{p}{b}+\frac{p}{c}=1\qquad\text{oraz}\qquad\frac{a}{p}+\frac{b}{p}+\frac{c}{p}=q+1.$$

Autor zadania: Łukasz Bożyk

Rozwiązanie:
Sposób 1. Załóżmy, że liczby a,b,c,p,q spełniają narzucone warunki. Równania można przepisać w postaci

$$p(ab+bc+ca)=abc\qquad\text{oraz}\qquad a+b+c=p(q+1).$$

Z pierwszego równania wynika, że $p\mid abc$. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $p\mid a$. Z drugiego równania wynika, że $p\mid b\iff p\mid c$. Rozważmy najpierw przypadek, w którym każda z liczb a,b,c dzieli się przez p. Zapiszmy $a=pd$,

$b = pe$, $c = pf$ dla pewnych dodatnich liczb całkowitych d, e, f. Pierwsze równanie przyjmuje postać $\frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} = 1$, a drugie $d + e + f = q + 1$. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $d \leqslant e \leqslant f$. Jeśli $d \geqslant 3$, to $\frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} \leqslant 3 \cdot \frac{1}{d} \leqslant 1$, więc musi zajść równość $d = e = f = 3$. Wtedy jednak $d + e + f = 9$, skąd $q = 8$ i sprzeczność, bo 8 nie jest liczbą pierwszą. Jeśli $d = 2$, to $\frac{1}{e} + \frac{1}{f} = \frac{1}{2}$, więc $2(e + f) = ef$, czyli $(e - 2)(f - 2) = 4$, skąd $(e, f) = (4, 4)$ lub $(e, f) = (3, 6)$. W pierwszym przypadku $d + e + f = 10$, co daje $q = 9$ i sprzeczność, bo 9 nie jest liczbą pierwszą, a w drugim przypadku $d + e + f = 11$, skąd $q = 10$ i sprzeczność, bo 10 nie jest liczbą pierwszą. Przypadek $d = 1$ daje sprzeczność, bo wtedy $\frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} > 1$.

Do rozważenia został przypadek, w którym $p \mid a$, $p \nmid b$ i $p \nmid c$. Zapiszmy $a = pd$ i podstawmy do danych równań. Pierwsze równanie przyjmuje postać $pd(b+c) = bc(d-1)$, z którego wynika, że $p \mid d-1$. Podstawmy więc $d = pe+1$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej e. Otrzymujemy $(pe + 1)(b + c) = bce$ oraz $b+c = p(q-pe)$. Z pierwszej równości wynika, że $e \mid b+c$, co w połączeniu z drugą daje $e \mid pq$. Zatem $e \in \{1, p, q, pq\}$. Jeśli $e = 1$, to pierwsze równanie daje $p \mid b$ lub $p \mid c$, wbrew naszemu założeniu. Jeśli $e = q$ lub $e = pq$, to prawa strona równości $b + c = p(q - pe)$ jest ujemna, a lewa jest dodatnia, sprzeczność. Zatem $e = p$. To prowadzi do $d = p^2 + 1$ i $a = p^3 + p$.

Równania przyjmują więc postać $(p^2 + 1)(b + c) = pbc$ i $b + c = p(q - p^2)$. Zauważmy, że

$$q = \frac{b+c}{p} + p^2 = \frac{(b+c)(p^2+1)}{p} - (b+c)p + p^2 = bc - (b+c)p + p^2 = (b-p)(c-p).$$

Liczba q jest pierwsza, więc jej jedyne rozkłady na czynniki całkowite to $q = 1 \cdot q = (-1) \cdot (-q)$. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $b - p = \pm 1$ i $c - p = \pm q$.

Jeśli $b - p = -1$ i $c - p = -q$, to $b = p - 1$ i $c = p - q$. Zauważmy, że z równania $b + c = p(q - p^2)$ wynika w szczególności, że $q > p^2$. Wtedy $c = p - q < p - p^2 < 0$, co daje sprzeczność. Zatem $b - p = 1$ i $c - p = q$, tj. $b = p + 1$ i $c = p + q$. Mamy

$$\begin{aligned}
(p+1)(p+q) &= (p^2+1)(q-p^2) \\
p^2 + pq + p + q &= p^2 q - p^4 + q - p^2 \\
p^4 + 2p^2 + p &= (p^2 - p)q \\
p^3 + 2p + 1 &= (p-1)q \\
(p-1)(p^2+p+3) + 4 &= (p-1)q
\end{aligned}$$

Z powyższej równości wynika, że $p-1 \mid 4$, skąd $p-1 \in \{1,2,4\}$, czyli $p \in \{2,3,5\}$. Dla $p=2$ obliczamy $q=13$ i widzimy, że warunki zadania są spełnione dla $a=10$, $b=3$ i $c=15$. Dla $p=3$ obliczamy $q=17$, co spełnia warunki dla $a=30$, $b=4$ i $c=20$. Dla $p=5$ mamy $q=34$, co nie spełnia warunków, bo 34 nie jest liczbą pierwszą.

Odpowiedź: Jedynymi parami (p,q) spełniającymi warunki zadania są $(2,13)$ i $(3,17)$.

Sposób 2. Podobnie jak w sposobie pierwszym zapisujemy równania w postaci

$$p(ab+bc+ca)=abc \qquad \text{oraz} \qquad a+b+c=p(q+1).$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}(a-p)(b-p)(c-p) &= abc-(ab+bc+ca)p+(a+b+c)p^2-p^3=\\ &= abc-abc+p(q+1)\cdot p^2-p^3=\\ &= p^3q.\end{aligned}$$

Stąd w szczególności wynika, że liczby a,b,c są różne od p. Zauważmy, że $-p<a-p<a-p+b+c=pq$. Stąd wynika, że liczba $a-p$ nie jest podzielna przez pq. Analogicznie dowodzimy, że $b-p$ i $c-p$ nie są podzielne przez pq. W takim razie z wyżej wyprowadzonego rozkładu liczby p^3q na czynniki $a-p$, $b-p$, $c-p$ wynika, że jedna z liczb $a-p$, $b-p$, $c-p$ jest równa q lub $-q$. Biorąc dodatkowo pod uwagę to, że liczby $a-p$, $b-p$, $c-p$ są większe od $-p$ zawężamy możliwe rozkłady liczby p^3q do następujących trzech: $q\cdot 1\cdot p^3$, $q\cdot p\cdot p^2$ i $(-q)\cdot(-1)\cdot p^3$.

W pierwszym przypadku $pq-2p=(a-p)+(b-p)+(c-p)=q+1+p^3$, skąd $q(p-1)=p^3+2p+1=(p-1)(p^2+p+3)+4$. Podobnie jak w ostatnim akapicie pierwszego sposobu rozwiązania dochodzimy do wniosku, że w tym przypadku jedynie pary $(p,q)=(2,13)$ i $(p,q)=(3,17)$ spełniają warunki zadania.

W drugim przypadku $pq-2p=(a-p)+(b-p)+(c-p)=q+p+p^2$, skąd wynika, że $p \mid q$, czyli $q=p$. Wtedy jednak równość $pq-2p=q+p+p^2$ upraszcza się do $p=0$ — sprzeczność.

W trzecim przypadku $pq-2p=(a-p)+(b-p)+(c-p)=-q-1+p^3$, więc $q(p+1)=p^3+2p-1=(p+1)(p^2-p+3)-4$, skąd wynika, że $p+1 \mid 4$. Jedyną liczbą pierwszą p taką, że 4 dzieli się przez $p+1$ jest $p=3$. Obliczamy stąd $q=8$, co nie spełnia warunków zadania, bo 8 nie jest liczbą pierwszą.

LXXV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

4. Rozstrzygnąć, czy istnieją liczby rzeczywiste a, b, c, dla których układ równań zmiennych x, y, z

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=b \\ x^4+y^4+z^4=c \end{cases}$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach rzeczywistych x, y, z.

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie: Tak, istnieją takie liczby. Połóżmy $a=0$, $b=2$, $c=2$. Niech x będzie dowolną liczbą rzeczywistą z przedziału $(0,1)$. Dobierzmy y tak, by $x^2+xy+y^2=1$. To jest równanie kwadratowe zmiennej y, którego wyróżnik $\Delta=4-3x^2$ jest dodatni. Jednym z pierwiastków tego równania jest $\frac{-x+\sqrt{4-3x^2}}{2}$. Połóżmy więc $y=\frac{-x+\sqrt{4-3x^2}}{2}$. Wreszcie, weźmy $z=-x-y$. Wówczas

$$x+y+z=0,$$

$$x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+(x+y)^2=2(x^2+xy+y^2)=2,$$

$$xy+yz+zx=\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}=-1,$$

$$\begin{aligned} x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 &= (xy+yz+zx)^2-2(xy\cdot yz+yz\cdot zx+zx\cdot xy)= \\ &= 1-2xyz(x+y+z)=1, \end{aligned}$$

$$x^4+y^4+z^4=(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)=4-2=2.$$

5. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2024$ i ciąg liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2}$ spełniający warunki

$$|a_k-a_{k-1}| \leqslant \frac{1}{k} \quad \text{oraz} \quad |a_1+a_2+\ldots+a_k| \leqslant 1$$

dla $k = 2, 3, \ldots, n^2$. Wykazać, że

$$|a_{n(n-1)}| \leqslant \frac{2}{n}.$$

Uwaga. Dowód, że $|a_{n(n-1)}| \leqslant \frac{75}{n}$ będzie nagradzany dwoma punktami.

Autor zadania: Jacek Jakimiuk

Rozwiązanie: Z założeń wynika, że:

$$\begin{aligned}
|a_{n^2-1} - a_{n^2}| &\leqslant \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)^2} \\
2|a_{n^2-2} - a_{n^2-1}| &\leqslant \frac{2}{n^2-1} < \frac{2}{(n-1)^2} \\
&\vdots \\
n|a_{n^2-n} - a_{n^2-n+1}| &\leqslant \frac{n}{n^2-n+1} < \frac{n}{(n-1)^2} \\
n|a_{n^2-n} - a_{n^2-n-1}| &\leqslant \frac{n}{n^2-n} < \frac{n}{(n-1)^2} \\
(n-1)|a_{n^2-n-1} - a_{n^2-n-2}| &\leqslant \frac{n-1}{n^2-n-1} < \frac{n-1}{(n-1)^2} \\
&\vdots \\
|a_{n^2-2n+1} - a_{n^2-2n}| &\leqslant \frac{1}{n^2-2n+1} = \frac{1}{(n-1)^2}
\end{aligned}$$

Dodając stronami powyższe nierówności i wykorzystując nierówność trójkąta otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\left|(2n+1)a_{n^2-n} - \sum_{k=n^2-2n}^{n^2} a_k\right| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(k|a_{n^2-k} - a_{n^2-k+1}| + k|a_{n^2-2n+k} - a_{n^2-2n-1+k}|\right) < \\
&\qquad < \left(\sum_{k=1}^{n} 2k\right) \cdot \frac{1}{(n-1)^2} = \frac{n(n+1)}{(n-1)^2}.
\end{aligned}$$

Ponieważ $n \geqslant 2024$, więc $n(n+1) < 2(n-1)^2$. Z powyższych nierówności, z założeń i z nierówności trójkąta wynika, że

$$|(2n+1)a_{n^2-n}| \leqslant \left|(2n+1)a_{n^2-n} - \sum_{k=n^2-2n}^{n^2} a_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{n^2-2n-1} a_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{n^2} a_k\right| <$$
$$< \frac{n(n+1)}{(n-1)^2} + 1 + 1 < \frac{2(n-1)^2}{(n-1)^2} + 2 = 4.$$

Stąd

$$|a_{n^2-n}| < \frac{4}{2n+1} < \frac{2}{n}.$$

Uwaga. W powyższym rozwiązaniu wykazano, że $|a_{n^2-n}| \leqslant \frac{1}{2n+1}\cdot\left(\frac{n(n+1)}{(n-1)^2}+2\right)$. Dla dużych n liczba $x_n = \frac{1}{2n+1}\cdot\left(\frac{n(n+1)}{(n-1)^2}+2\right)$ jest bardzo bliska $\frac{3}{2n}$. Ściślej rzecz ujmując, $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{1/n} = \frac{3}{2}$. Nasuwa się pytanie, czy można znaleźć taki ciąg $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz stałą $c < \frac{3}{2}$, że $|a_{n^2-n}| \leqslant y_n$ dla każdego n oraz $\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{1/n} = c$, a jeśli tak, to jak małą stałą może być c.

Niech N będzie liczbą całkowitą, której dokładną wartość ustalimy później. Powtarzając rachunki przedstawione w rozwiązaniu otrzymujemy

$$\left|(n+N+1)a_{n^2-n} - \sum_{k=n^2-n-N}^{n^2} a_k\right| =$$
$$= \left|\sum_{k=1}^{n} k(a_{n^2-k} - a_{n^2-k+1}) + \sum_{k=1}^{N} k(a_{n^2-n-N+k} - a_{n^2-n-N+k-1})\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} k|a_{n^2-k} - a_{n^2-k+1}| + \sum_{k=1}^{N} k|a_{n^2-n-N+k} - a_{n^2-n-N+k-1}| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2-k+1} + \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{n^2-n-N+k} <$$
$$< \left(\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{N} k\right)\cdot\frac{1}{n^2-n-N+1} =$$
$$= \frac{n(n+1)+N(N+1)}{2(n^2-n-N+1)},$$

co w podobny sposób jak w rozwiązaniu prowadzi do szacowania

$$|(n+N+1)a_{n^2-n}| < \frac{n(n+1)+N(N+1)}{2(n^2-n-N+1)} + 2 = \frac{5n^2+N^2-3n-3N+4}{2(n^2-n-N+1)}.$$

Wstawmy $N = \lfloor dn \rfloor$, przy czym liczbę $d > 0$ dobierzemy za chwilę. Mamy

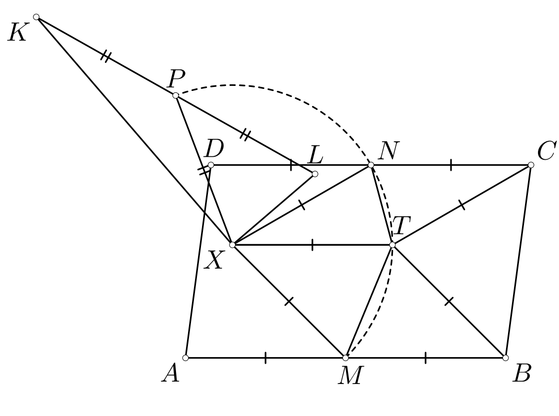
$$|a_{n^2-n}| < \frac{5n^2 + N^2 - 3n - 3N + 4}{2(n^2 - n - N + 1)(n + N + 1)} < $$
$$< \frac{5n^2 + (dn)^2 - 3n - 3(dn - 1) + 4}{2(n^2 - n - dn + 1)(n + dn)} =: y_n.$$

Wówczas $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{1/n} = \frac{5+d^2}{2(d+1)}$. Najmniejsza wartość wyrażenia $\frac{5+d^2}{2(d+1)}$ wynosi $\sqrt{6}-1$ i jest ona przyjmowana dla $d = \sqrt{6}-1$. Oszacowaliśmy zatem $|a_{n^2-n}|$ z góry przez y_n, przy czym $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{1/n} = \frac{5+d^2}{2(d+1)} = \sqrt{6} - 1 \approx 1{,}4494897 < \frac{3}{2}$.

6. Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt X w jego wnętrzu nieleżący na przekątnej AC i spełniający równości $\sphericalangle AXB = \sphericalangle CXD = 90°$. Oznaczmy okrąg opisany na trójkącie AXC przez Ω. Punkty E i F leżą na Ω w taki sposób, że EF jest średnicą Ω, punkty E, X, B nie są współliniowe oraz punkty F, X, D nie są współliniowe. Załóżmy, że okręgi opisane na trójkątach BXE i DXF przecinają się w punkcie $K \neq X$ oraz że $L \neq X$ jest takim punktem na Ω, że $\sphericalangle KXL = 90°$. Udowodnić, że $KL = AB$.

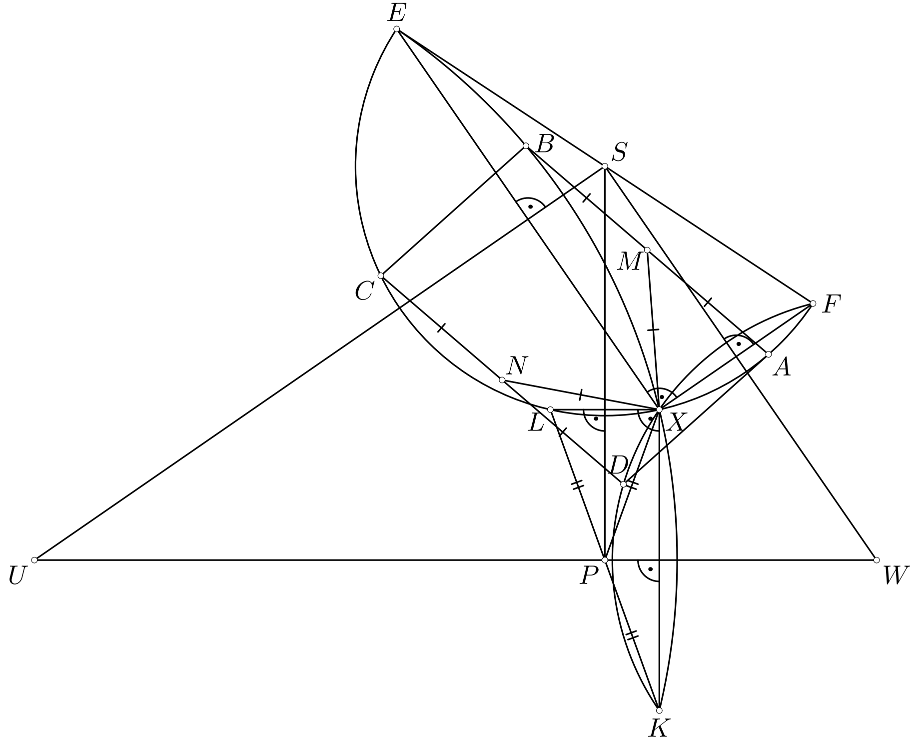
Autor zadania: Stanisław Majchrzak

Rozwiązanie:
Sposób 1. Oznaczmy środki odcinków AB, CD, KL odpowiednio przez M, N, P. Wystarczy udowodnić, że $XP = XM$, bowiem wtedy $KL = 2XP = 2XM = AB$. Niech T będzie takim punktem, że $\overrightarrow{XT} = \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MB}$. Czworokąt $XNCT$ jest równoległobokiem i $CN = NX$, więc jest rombem. Analogicznie $BMXT$ jest rombem. W szczególności $TB = TX = TC$, więc T jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BXC. Ponieważ $XN = XM = XT$, więc X jest środkiem okręgu przechodzącego przez punkty M, N, T. Wystarczy udowodnić, że $XP = XM$, czyli że P leży na okręgu opisanym na trójkącie MNT.



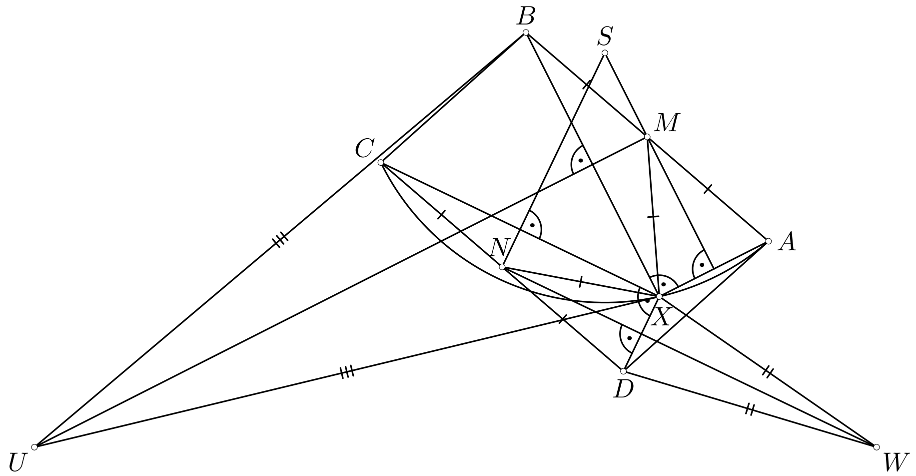
Oznaczmy środki okręgów opisanych na trójkątach AXC, BXE, DXF odpowiednio przez S, U, W. Punkty U, W, P leżą na symetralnej odcinka KX. Prosta SP jest symetralną odcinka XL. Ponadto kąt KXL jest prosty. Stąd $PS \perp LX \perp KX \perp UW$. Zatem P jest rzutem prostokątnym punktu S na UW.

Proste SU, SW są symetralnymi odpowiednio odcinków XE i XF, a ponadto kąt EXF jest prosty. Stąd wynika, że $SU \perp XE \perp XF \perp SW$.



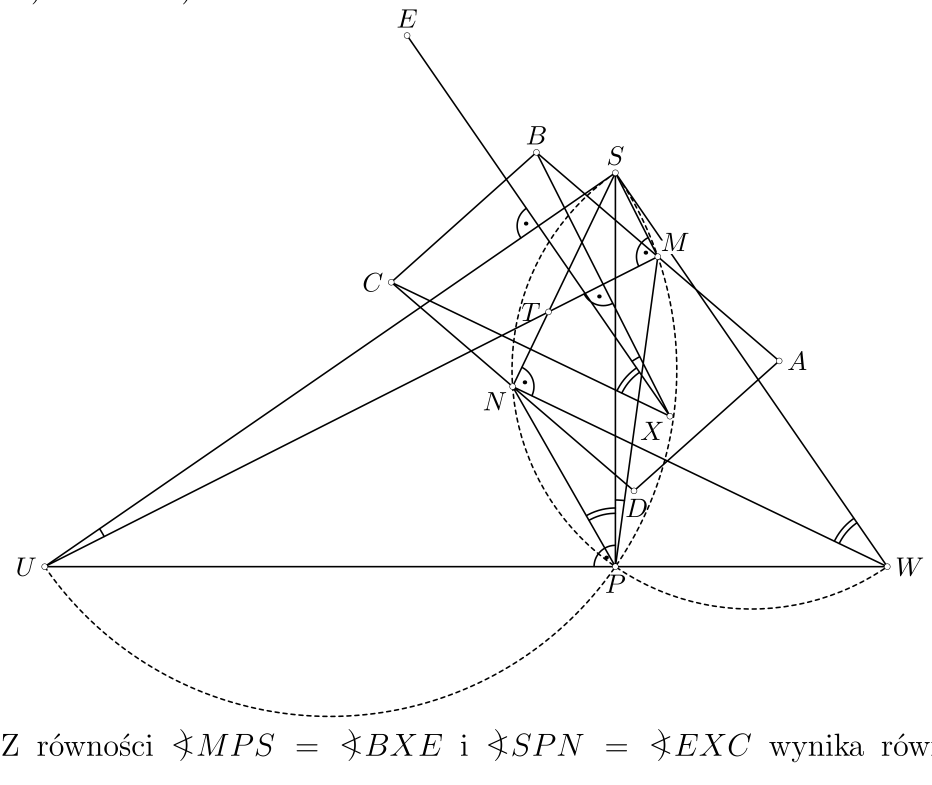
Proste MS i MU są symetralnymi odpowiednio odcinków AX i BX. Ponadto kąt AXB jest prosty. Stąd $MS \perp AX \perp BX \perp MU$.

Proste NS i NW są symetralnymi odpowiednio odcinków CX i DX. Ponadto kąt CXD jest prosty. Stąd $NS \perp CX \perp DX \perp NW$.



Ponieważ $\sphericalangle SMU = \sphericalangle SPU = 90°$, więc punkty M, P leżą na okręgu o średnicy SU. Stąd $\sphericalangle MPS = \sphericalangle MUS$. Ponieważ $MU \perp BX$ i $SU \perp EX$, więc $\sphericalangle MUS = \sphericalangle BXE$.

Ponieważ $\sphericalangle WPS = \sphericalangle WNS = 90°$, więc punkty P, N leżą na okręgu o średnicy SW. Stąd $\sphericalangle SPN = \sphericalangle SWN$. Ponieważ $SW \parallel EX$ i $WN \parallel CX$, więc $\sphericalangle SWN = \sphericalangle EXC$.



Z równości $\sphericalangle MPS = \sphericalangle BXE$ i $\sphericalangle SPN = \sphericalangle EXC$ wynika równość

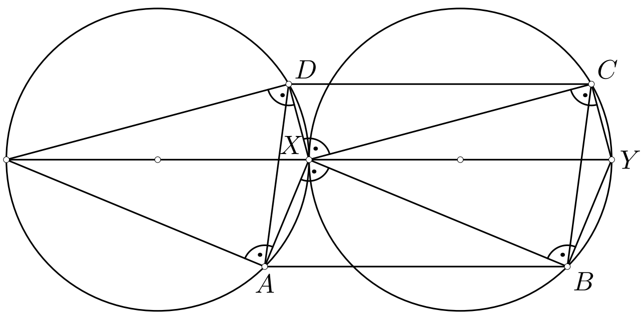
$\sphericalangle MPN = \sphericalangle BXC$. Kąt BXC jest równy kątowi między symetralnymi odcinków BX i CX, czyli kątowi MTS. Zatem $\sphericalangle MPN = \sphericalangle MTS$, co dowodzi, że punkty P, M, N, T leżą na okręgu.

Sposób 2.

Lemat. Oznaczmy okręgi opisane na trójkątach ABX, BCX, CXD, DXA odpowiednio przez o_1, o_2, o_3, o_4. Wówczas te cztery okręgi są przystające, a ponadto okręgi o_2 i o_4 są styczne.

Dowód lematu. Niech Y będzie takim punktem, że $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Wówczas czworokąty $ABYX$ i $XYCD$ są równoległobokami. Wynika stąd, że $\sphericalangle YBX = \sphericalangle AXB = 90°$ oraz $\sphericalangle XCY = \sphericalangle CXD = 90°$. Stąd wynika, że punkty B i C leżą na okręgu o średnicy XY. To znaczy, że średnica okręgu o_2 ma taką samą długość co AB. Analogicznie dowodzimy, że okrąg o_4 też ma średnicę tej długości. Rozważane okręgi są zatem przystające.

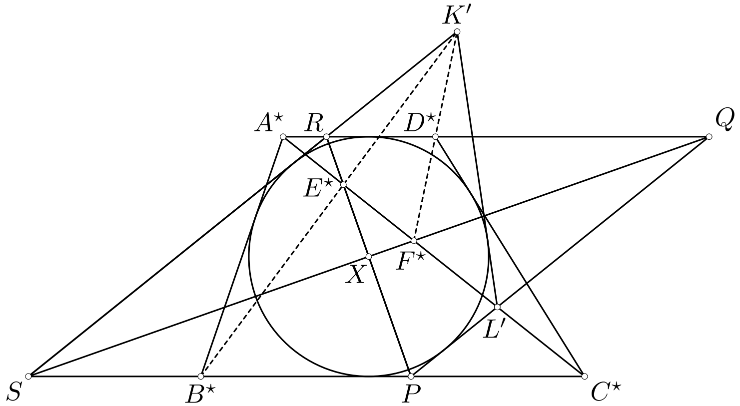
Zauważmy jeszcze, że środek o_2, czyli środek XY, leży na prostej przechodzącej przez X równoległej do AB. Analogicznie pokazujemy, że środek okręgu o_4 leży na tej prostej. Stąd wynika, że okręgi o_2 i o_4 są styczne, bo prosta przechodząca przez środki tych okręgów przechodzi przez punkt X, który leży na obu tych okręgach.



Rozważmy inwersję względem okręgu o środku X i dowolnym promieniu r. Obraz dowolnego punktu T w tej inwersji będziemy oznaczać przez $T^\star$. Ponieważ okręgi o_1, o_2, o_3, o_4 są przystające i przechodzą przez X, więc ich obrazami są odpowiednio proste $A^\star B^\star$, $B^\star C^\star$, $C^\star D^\star$ i $D^\star A^\star$, przy czym odległość punktu X od każdej z nich jest taka sama (równa $\frac{r^2}{AB}$). Czworokąt $A^\star B^\star C^\star D^\star$ jest więc opisany na okręgu o środku X i promieniu $\frac{r^2}{AB}$; oznaczmy ten okrąg przez ω. Ponieważ okręgi o_2 i o_4 nie mają punktów wspólnych poza X, więc proste $A^\star D^\star$ i $B^\star C^\star$ są równoległe. Punkty $E^\star$, $F^\star$ leżą na prostej $A^\star C^\star$, przy czym $\sphericalangle F^\star X E^\star = 90°$. Punkt $K^\star$ jest przecięciem prostych $B^\star E^\star$ i $D^\star F^\star$. Punkt $L^\star$ leży na prostej $A^\star C^\star$ i spełnia równość $\sphericalangle L^\star X K^\star = 90°$. Teza zadania jest równoważna temu, że okrąg opisany na trójkącie KLX jest przystający do o_1, czyli temu, że prosta $K^\star L^\star$ jest styczna do ω.

Załóżmy, że żadna z prostych $E^\star X$, $F^\star X$ nie jest równoległa do podstaw trapezu $A^\star B^\star C^\star D^\star$. Oznaczmy punkty przecięcia prostej $E^\star X$ z prostymi $B^\star C^\star$ i $A^\star D^\star$ odpowiednio przez P i R. Oznaczmy punkty przecięcia prostej $F^\star X$ z prostymi $A^\star D^\star$ i $B^\star C^\star$ odpowiednio przez Q i S. Wtedy $PQRS$ jest rombem opisanym na okręgu ω. Oznaczmy punkt przecięcia prostych PQ i $A^\star C^\star$ przez L'. Niech K' będzie punktem przecięcia prostej RS ze styczną do ω poprowadzoną z punktu L' (różną od PQ). Udowodnimy, że $K' = K^\star$ i $L' = L^\star$, co zakończy dowód.

Z twierdzenia Brianchona dla sześciokąta $A^\star RK'L'PB^\star$ wynika, że proste $A^\star L'$, RP i $K'B^\star$ przecinają się w jednym punkcie. Ponieważ $A^\star L'$ i RP przecinają się w punkcie $E^\star$, więc oznacza to, że K' leży na prostej $B^\star E^\star$. Podobnie, z twierdzenia Brianchona dla sześciokąta $C^\star SK'L'QD^\star$ wynika, że proste $C^\star L'$, SQ i $K'D^\star$ przecinają się w jednym punkcie. Ponieważ $C^\star L'$ i QS przecinają się w punkcie $F^\star$, więc oznacza to, że K' leży na prostej $F^\star D^\star$.



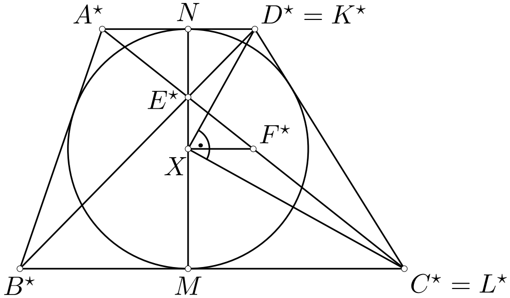
Wykazaliśmy zatem, że K' jest przecięciem prostych $B^\star E^\star$ i $D^\star F^\star$, a więc $K' = K^\star$. Do wykazania zostaje równość $\sphericalangle L'XK^\star = 90°$. To jest równoważne równości $\sphericalangle XK^\star L' + \sphericalangle K^\star L'X = 90°$. Proste $K^\star X$, $L'X$ są dwusiecznymi kątów $RK^\star L'$ i $K^\star L'P$, więc $\sphericalangle XK^\star L' + \sphericalangle K^\star L'X = \frac{1}{2}(\sphericalangle RK^\star L' + \sphericalangle K^\star L'P)$. Należy więc wykazać, że $\sphericalangle RK^\star L' + \sphericalangle K^\star L'P = 180°$. To wynika z równoległości prostych $K^\star R$, $L'P$.

Do rozważenia zostały dwa przypadki:

1° $F^\star X \parallel BC$. Niech M i N będą punktami styczności okręgu ω odpowiednio z bokami $B^\star C^\star$ i $A^\star D^\star$. Z twierdzenia Brianchona dla zdegenerowanego sześciokąta $A^\star B^\star MC^\star D^\star N$ wynika, że przekątne $A^\star C^\star$, $B^\star D^\star$ i prosta MN przecinają się w jednym punkcie. Ponieważ $F^\star X \parallel BC$, więc $E^\star X \perp BC$, skąd $E^\star X$ pokrywa się z prostą MN. To oznacza, że $E^\star$ jest przecięciem przekątnych trapezu $A^\star B^\star C^\star D^\star$. Stąd punkt $K^\star$, będący przecięciem prostych $B^\star E^\star$ i $D^\star F^\star$, pokrywa się z punktem $D^\star$. Ponieważ

$$\begin{aligned}\sphericalangle C^\star X K^\star &= \sphericalangle C^\star X D^\star = 180^\circ - \sphericalangle X D^\star C^\star - \sphericalangle D^\star C^\star X = \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(\sphericalangle A^\star D^\star C^\star + \sphericalangle D^\star C^\star B^\star) = 180^\circ - \frac{1}{2}\cdot 180^\circ = 90^\circ,\end{aligned}$$

więc punkt $L^\star$ pokrywa się z $C^\star$. Ostatecznie prosta $K^\star L^\star$ pokrywa się z prostą $C^\star D^\star$, więc w szczególności jest ona styczna do ω.



2° $E^\star X \parallel BC$. Analogicznie jak w przypadku 1° dowodzimy, że $F^\star$ jest przecięciem przekątnych trapezu $A^\star B^\star C^\star D^\star$. Stąd wynika, że punkt $K^\star$, będący przecięciem prostych $B^\star E^\star$ i $D^\star F^\star$, pokrywa się z punktem $B^\star$. Następnie, prowadząc analogiczne rachunki jak w przypadku 1°, dowodzimy, że $\sphericalangle K^\star X A^\star = \sphericalangle B^\star X A^\star = 90^\circ$. Stąd $L^\star$ pokrywa się z punktem $A^\star$. W konsekwencji prosta $K^\star L^\star$ pokrywa się z prostą $A^\star B^\star$, w szczególności jest styczna do ω.