LXXV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego
3 kwietnia 2024 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Dany jest prostokąt $ABCD$ i punkt X leżący w jego wnętrzu. Dwusieczne kątów DAX oraz CBX przecinają się w punkcie P. Punkt Q spełnia równości $\sphericalangle QAP = \sphericalangle QBP = 90^\circ$. Udowodnić, że $PX = QX$.

2. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Bolek rysuje $2n$ punktów na płaszczyźnie, z których żadne dwa nie wyznaczają prostej pionowej ani poziomej. Następnie Lolek dla każdego z tych $2n$ punktów rysuje dwie półproste o początku w tym punkcie, z których jedna jest pionowa, a druga pozioma. Lolek chce zrobić to w taki sposób, by narysowane półproste podzieliły płaszczyznę na jak najwięcej obszarów. Wyznaczyć największą liczbę całkowitą k taką, że Lolek może uzyskać co najmniej k obszarów niezależnie od położenia punktów narysowanych przez Bolka.

3. Wyznaczyć wszystkie pary liczb pierwszych (p, q) o następującej własności: istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniające równości

$$\frac{p}{a} + \frac{p}{b} + \frac{p}{c} = 1 \qquad \text{oraz} \qquad \frac{a}{p} + \frac{b}{p} + \frac{c}{p} = q + 1.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXXV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego
4 kwietnia 2024 r. (drugi dzień zawodów)

4. Rozstrzygnąć, czy istnieją liczby rzeczywiste a, b, c, dla których układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = b \\ x^4 + y^4 + z^4 = c \end{cases}$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach rzeczywistych x, y, z.

5. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2024$ i ciąg liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2}$ spełniający warunki

$$|a_k - a_{k-1}| \leqslant \frac{1}{k} \qquad \text{oraz} \qquad |a_1 + a_2 + \ldots + a_k| \leqslant 1$$

dla $k = 2, 3, \ldots, n^2$. Wykazać, że

$$|a_{n(n-1)}| \leqslant \frac{2}{n}.$$

Uwaga. Dowód nierówności $|a_{n(n-1)}| \leqslant \frac{75}{n}$ będzie nagradzany dwoma punktami.

6. Dany jest równoległobok $ABCD$. Punkt X leży w jego wnętrzu poza przekątną AC i spełnia równości $\sphericalangle AXB = \sphericalangle CXD = 90^\circ$. Oznaczmy okrąg opisany na trójkącie AXC przez Ω. Punkty E i F leżą na okręgu Ω w taki sposób, że odcinek EF jest jego średnicą, punkty E, X, B nie są współliniowe oraz punkty F, X, D nie są współliniowe. Załóżmy, że okręgi opisane na trójkątach BXE i DXF przecinają się w punkcie $K \neq X$ oraz że $L \neq X$ jest takim punktem na Ω, że $\sphericalangle KXL = 90^\circ$. Udowodnić, że $KL = AB$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.