LXXIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego
29 marca 2023 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Dany jest taki ciąg liczb całkowitych $a_1, a_2, a_3, \ldots$, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych k, ℓ liczba $a_k + a_\ell$ dzieli się przez $k + \ell$. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych $k > \ell$ liczba $a_k - a_\ell$ dzieli się przez $k - \ell$.

2. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ostrokątny ABC. Punkt X leży na odcinku BC po tej samej stronie prostej AI, co punkt B. Punkt Y leży na krótszym łuku AB okręgu opisanego na trójkącie ABC. Spełnione są przy tym równości kątów

$$\sphericalangle AIX = \sphericalangle XYA = 120^\circ.$$

Dowieść, że prosta YI jest dwusieczną kąta XYA.

3. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Dane są też liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$ należące do przedziału $[0,1]$. Udowodnić, że istnieją takie liczby $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \{0,1\}$, że dla dowolnych $1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n$ zachodzi nierówność

$$\left|\sum_{i=k}^{\ell}(a_i - b_i)\right| \leqslant \frac{n}{n+1}.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXXIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego
30 marca 2023 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dane są liczba całkowita $n \geqslant 2$ oraz dodatnie liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o sumie równej 1. Niech $b = a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n$. Udowodnić, że

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (i-j)^2 a_i a_j \leqslant (n-b)(b-1).$$

5. Dana jest liczba pierwsza $p > 2023$. Dla dowolnej liczby całkowitej x symbolem $r(x)$ oznaczymy resztę z dzielenia liczby x przez p. Niech $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_m$ będą wszystkimi liczbami pierwszymi mniejszymi od $\sqrt[4]{\frac{1}{2}p}$. Załóżmy, że $q_1, q_2, \ldots, q_m$ są takimi liczbami całkowitymi, że liczby $p_1q_1 - 1, p_2q_2 - 1, \ldots, p_mq_m - 1$ są podzielne przez p. Udowodnić, że dla dowolnych liczb całkowitych $0 < a, b < p$ zbiory

$$\{r(q_1), r(q_2), \ldots, r(q_m)\}, \quad \{r(aq_1 + b), r(aq_2 + b), \ldots, r(aq_m + b)\}$$

mają co najwyżej trzy wspólne elementy.

6. Dla dowolnej liczby rzeczywistej a i dowolnego $b > 0$ *rozszerzeniem* przedziału domkniętego $[a-b, a+b] \subseteq \mathbb{R}$ nazwiemy przedział domknięty $[a-2b, a+2b]$. Powiemy, że przedziały $P_1, P_2, \ldots, P_k$ *pokrywają* zbiór X, jeśli $X \subseteq P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_k$.

Udowodnić, że istnieje liczba całkowita M o następującej własności: dla dowolnego skończonego podzbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ istnieje taki podzbiór $B \subseteq A$ składający się z co najwyżej M liczb, że dla dowolnych stu przedziałów domkniętych pokrywających zbiór B ich rozszerzenia pokrywają zbiór A.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.