



# LXXIV Olimpiada Matematyczna

## Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

1. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite  $n$ , dla których istnieją takie liczby  $s_1, s_2, \dots, s_n \in \{-1, 1\}$ , że

$$1 \cdot s_1 + 2 \cdot s_2 + \dots + n \cdot s_n = 0.$$

*Autor zadania:* Piotr Nayar

*Rozwiązanie:*

*Odpowiedź:* Liczby  $n$  postaci  $4k + 3$  i  $4k + 4$  dla  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Na początek zauważmy, że gdy  $n$  jest postaci  $4k + 1$  lub  $4k + 2$  dla pewnego całkowitego  $k$ , to dla dowolnego wyboru liczb  $s_1, s_2, \dots, s_n$  w sumie

$$1 \cdot s_1 + 2 \cdot s_2 + \dots + n \cdot s_n$$

występuje dokładnie  $2k + 1$  nieparzystych składników, wobec czego cała suma jest liczbą nieparzystą. Liczby  $n$  postaci  $4k + 1$  i  $4k + 2$  nie spełniają więc warunków zadania.

Udowodnimy, że jeśli dla jakiejś liczby  $n \in \mathbb{N}$  istnieją takie liczby  $s_1, s_2, \dots, s_n \in \{-1, 1\}$ , że  $1 \cdot s_1 + 2 \cdot s_2 + \dots + n \cdot s_n = 0$ , to istnieją też takie liczby dla  $n + 4$ . Wystarczy przyjąć  $s_{n+1} = s_{n+4} = 1$  oraz  $s_{n+2} + s_{n+3} = -1$ , bo  $(n + 1) - (n + 2) - (n + 3) + (n + 4) = 0$ .

Teza zachodzi dla  $n = 3$ , bo  $1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 = 0$ . Zachodzi też dla  $n = 4$ , bo  $1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 0$ . Teza zachodzi więc dla każdej liczby postaci  $4k + 3$  i każdej liczby postaci  $4k + 4$ , gdzie  $k$  oznacza dowolną całkowitą liczbę nieujemną.

*Uwaga.* Liczby  $s_1, s_2, \dots, s_n$  można dobierać na wiele różnych sposobów. Na przykład, jeżeli  $n = 4k - 1$  dla pewnego  $k = 1, 2, \dots$ , to możemy wziąć

$$s_i = \begin{cases} 1 & \text{dla } i \in \{1, 2, 3, \dots, k - 1, 3k, 3k + 1, \dots, 4k - 2, 4k - 1\} \\ -1 & \text{dla } i \in \{k, k + 1, \dots, 3k - 1\} \end{cases}.$$

Wówczas

$$1 \cdot s_1 + 2 \cdot s_2 + \dots + n \cdot s_n = A - B + C,$$

gdzie

$$A = 1 + 2 + \dots + (k - 1) = \frac{(k - 1)k}{2},$$

$$B = k + (k + 1) + \dots + (3k - 1) = \frac{2k(4k - 1)}{2} = k(4k - 1),$$

$$C = 3k + (3k + 1) + \dots + (4k - 1) = \frac{k(7k - 1)}{2}.$$

(Powyższe równości wynikają ze wzoru na sumę ciągu arytmetycznego.)

Stąd

$$A - B + C = k \cdot \left( \frac{k - 1}{2} - (4k - 1) + \frac{7k - 1}{2} \right) = 0.$$

Jeżeli  $n = 4k$  dla pewnego  $k = 1, 2, \dots$ , to możemy wybrać

$$s_i = \begin{cases} 1 & \text{dla } i \in \{1, 2, 3, \dots, k, 3k + 1, 3k + 2, \dots, 4k\} \\ -1 & \text{dla } i \in \{k + 1, k + 2, \dots, 3k\} \end{cases}.$$

Analogicznie jak wyżej widzimy, że

$$1 \cdot s_1 + 2 \cdot s_2 + \dots + n \cdot s_n = A - B + C,$$

gdzie

$$A = 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k + 1)}{2},$$

$$B = (k + 1) + (k + 2) + \dots + 3k = \frac{2k(4k + 1)}{2} = k(4k + 1),$$

$$C = (3k + 1) + (3k + 2) + \dots + 4k = \frac{k(7k + 1)}{2}.$$

Stąd

$$A - B + C = k \cdot \left( \frac{k + 1}{2} - (4k + 1) + \frac{7k + 1}{2} \right) = 0.$$

2. Znaleźć wszystkie trójki liczb rzeczywistych  $(a, b, c)$  spełniające układ równań

$$\begin{cases} a^2 + 4ab + b^2 = 1 \\ b^2 + 4bc + c^2 = 1 \\ c^2 + 4ca + a^2 = -2 \end{cases}$$

Autor zadania: Tomasz Cieśla

Rozwiązanie:

Odpowiedź:  $(a, b, c) = (1, 0, -1)$  i  $(a, b, c) = (-1, 0, 1)$ .

Porównując lewe strony pierwszego i drugiego równania otrzymujemy  $a^2 + 4ab = 4bc + c^2$ , skąd

$$0 = a^2 - c^2 + 4ab - 4bc = (a - c)(a + c + 4b).$$

Jeśli  $a - c = 0$ , to  $a = c$  i trzecie równanie przyjmuje postać  $6a^2 = -2$ . To jest sprzeczność, bo kwadrat liczby rzeczywistej nie może być ujemny. W takim razie  $a - c \neq 0$ , wobec czego  $a + c + 4b = 0$ .

Z drugiej strony, dodając stronami wszystkie trzy równania dostajemy  $2(a + b + c)^2 = 0$ , skąd  $a + b + c = 0$ .

Otrzymane związki dają  $3b = (a + c + 4b) - (a + b + c) = 0 - 0 = 0$ , więc  $b = 0$ . Stąd  $a + c = 0$ , tj.  $c = -a$ . Pierwsze równanie redukuje się do  $a^2 = 1$ , skąd  $a = 1$  lub  $a = -1$ . Otrzymaliśmy dwie możliwe trójki:  $(a, b, c) = (1, 0, -1)$  i  $(a, b, c) = (-1, 0, 1)$ . Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że obie spełniają wyjściowy układ równań.

3. Dany jest trójkąt  $ABC$ . Okrąg styczny do boku  $AC$  oraz do przedłużeń boków  $AB, BC$  ma promień długości  $r_1$ . Okrąg styczny do boku  $BC$  oraz do przedłużeń boków  $AB, AC$  ma promień długości  $r_2$ . Udowodnić, że jeżeli  $r_1 + r_2 = AB$ , to trójkąt  $ABC$  jest prostokątny.

Autor zadania: Dominik Burek

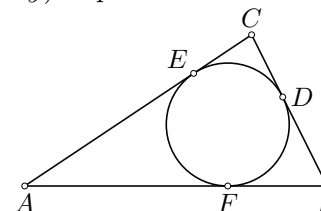
Rozwiązanie:

Przedstawimy kilka sposobów rozwiązania. Najpierw jednak sformułujemy i udowodnimy dwa pomocnicze stwierdzenia, z których będziemy korzystać. Dla skrócenia zapisu będziemy oznaczać  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$ ,  $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ .

*Lemat 1.* Okrąg wpisany w trójkąt  $ABC$  jest styczny do boków  $BC, CA, AB$  odpowiednio w punktach  $D, E, F$ . Wówczas

$$AE = AF = p - a, \quad BD = BF = p - b, \quad CD = CE = p - c.$$

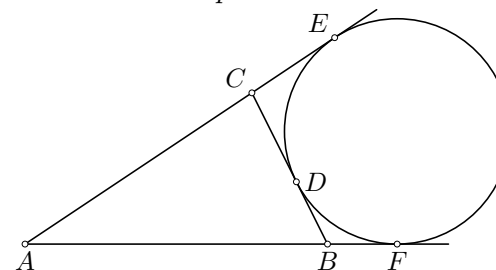
*Dowód.* Oznaczmy  $x = AE = AF$ ,  $y = BD = BF$ ,  $z = CD = CE$ . Wówczas  $a = y + z$ ,  $b = x + z$  i  $c = x + y$ . Po dodaniu stronami tych trzech równości dostajemy  $a + b + c = 2(x + y + z)$ , skąd  $p = x + y + z$ . W takim razie  $x = (x + y + z) - (y + z) = p - a$ ,  $y = (x + y + z) - (x + z) = p - b$  i  $z = (x + y + z) - (x + y) = p - c$ .



*Lemat 2.* Dany jest trójkąt  $ABC$ . Okrąg  $o$  jest styczny do boku  $BC$  w punkcie  $D$  oraz do przedłużeń boków  $AC$  i  $AB$  odpowiednio w punktach  $E$  i  $F$ . Wówczas

$$AE = AF = p, \quad BD = BF = p - c, \quad CD = CE = p - b.$$

*Dowód.* Oznaczmy  $x = AE = AF$ ,  $y = BD = BF$ ,  $z = CD = CE$ . Wówczas  $a = y + z$ ,  $b = x - z$  i  $c = x - y$ . Po dodaniu stronami tych trzech równości dostajemy  $a + b + c = 2x$ , skąd  $p = x$ . W takim razie  $y = x - c = p - c$  i  $z = x - b = p - b$ .



Przejdźmy do rozwiązania zadania.

*Sposób 1.* Oznaczmy środek okręgu stycznego do boku  $AC$  i przedłużeń boków  $AB, BC$  przez  $J$ , oraz środek okręgu stycznego do boku  $BC$  i przedłużeń boków  $AB, AC$  przez  $K$ . Niech  $D$  będzie punktem

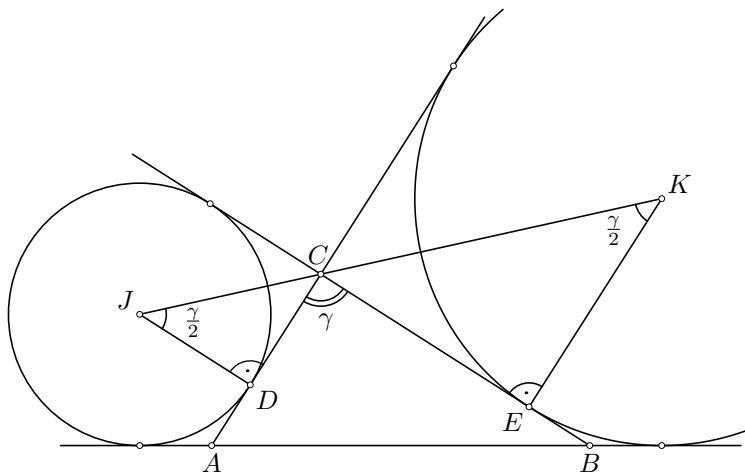
stycznosci pierwszego okręgu z bokiem  $AC$ , a  $E$  — punktem stycznosci drugiego okręgu z bokiem  $BC$ . Z Lematu 2. wynika, że  $CD = p - a$  oraz  $CE = p - b$ , więc  $CD + CE = 2p - a - b = c$ . Z drugiej strony, oznaczając  $\sphericalangle ACB = \gamma$ , mamy

$$\sphericalangle JCD = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = \sphericalangle ECK,$$

więc  $\sphericalangle DJC = \frac{\gamma}{2} = \sphericalangle CKE$ . Stąd  $r_1 = CD \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$  i  $r_2 = CE \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$ . Po dodaniu stronami otrzymujemy

$$r_1 + r_2 = (CD + CE) \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = c \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}.$$

Jeśli więc  $r_1 + r_2 = c$ , to  $\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = 1$ . Ponieważ  $0 < \frac{\gamma}{2} < 90^\circ$ , więc  $\frac{\gamma}{2} = 45^\circ$ , tj.  $\gamma = 90^\circ$ .



*Sposób 2.* Przyjmijmy oznaczenia punktów  $J, K, D, E$  jak w sposobie pierwszym. Obierzmy na boku  $AB$  taki punkt  $F$ , że  $AF = r_1$ . Wówczas z równości  $r_1 + r_2 = AB$  wynika, że  $BF = r_2$ . Z Lematu 2. wynika, że  $AD = p - c = BE$ . Niech  $I$  będzie takim punktem leżącym po tej samej stronie prostej  $AB$  co  $C$ , że  $IF \perp AB$  i  $IF = p - c$ . Wówczas z cechy przystawania bok-kąt-bok wynika, że  $\triangle JDA \equiv \triangle AFI$  oraz  $\triangle BEK \equiv \triangle IFB$ . Mamy

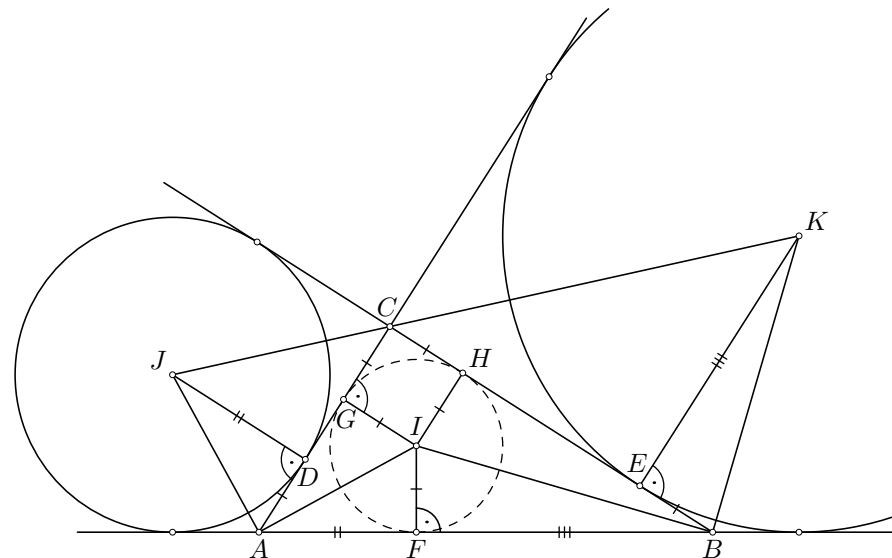
$$\sphericalangle FAI = \sphericalangle AJD = 90^\circ - \sphericalangle DAJ = 90^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2} \sphericalangle BAC) = \frac{1}{2} \sphericalangle BAC,$$

więc  $AI$  jest dwusieczną kąta  $BAC$ . Analogicznie,

$$\sphericalangle IBF = \sphericalangle EKB = 90^\circ - \sphericalangle KBE = 90^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2} \sphericalangle CBA) = \frac{1}{2} \sphericalangle CBA,$$

więc  $BI$  jest dwusieczną kąta  $CBA$ . W takim razie  $I$  jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt  $ABC$ , a  $F$  — jego punktem stycznosci z bokiem  $AB$ . Oznaczmy punkty stycznosci okręgu wpisanego w trójkąt  $ABC$  z bokami  $AC$  i  $BC$  odpowiednio przez  $G$  i  $H$ . Z Lematu 1. wynika, że  $CH = CG = p - c = IG = IH$ . Czworokąt  $CGIH$  jest więc rombem. Stąd

$$\sphericalangle ACB = 180^\circ - \sphericalangle IGC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$



*Sposób 3.* Spróbujmy wyrazić  $r_1$  i  $r_2$  w zależności od  $a, b, c$ . Przyjmijmy oznaczenia punktów  $J$  i  $K$  jak w sposobie pierwszym. Kwadratowe nawiasy oznaczają pole figury. Wysokości trójkątów  $ABJ$ ,  $BCJ$  i  $ACJ$  opuszczone z wierzchołka  $J$  mają długość  $r_1$ . W takim razie

$$[ABC] = [ABJ] + [BCJ] - [ACJ] = \frac{cr_1}{2} + \frac{ar_1}{2} - \frac{br_1}{2} = (p - b)r_1.$$

Analogicznie, wysokości trójkątów  $ABK$ ,  $ACK$  i  $CBK$  mają długość  $r_2$ , więc

$$[ABC] = [ABK] + [ACK] - [CBK] = \frac{cr_2}{2} + \frac{br_2}{2} - \frac{ar_2}{2} = (p - a)r_2.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= \frac{[ABC]}{p-b} + \frac{[ABC]}{p-a} = [ABC] \cdot \left( \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-a} \right) \\ &= [ABC] \cdot \frac{(p-a) + (p-b)}{(p-b)(p-a)} = [ABC] \cdot \frac{c}{(p-b)(p-a)}. \end{aligned}$$

Z założenia  $r_1 + r_2 = c$  wynika więc, że  $(p-b)(p-a) = [ABC]$ . Ze wzoru Herona mamy

$$[ABC] = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

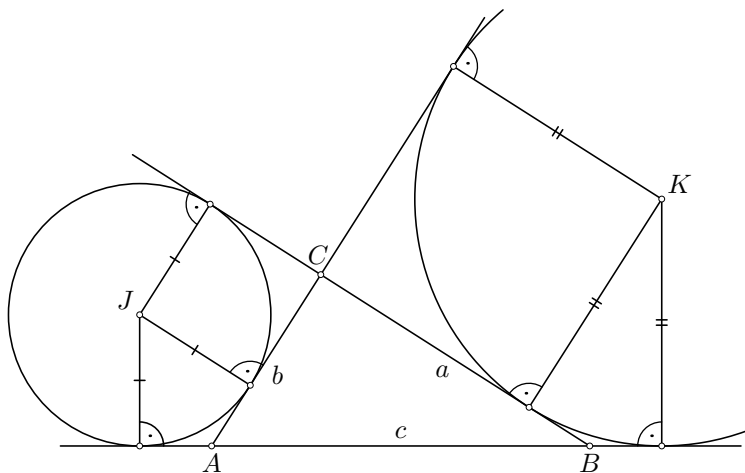
co w połączeniu z poprzednią równością daje

$$(p-b)(p-a) = p(p-c).$$

Po wymnożeniu mamy  $p^2 - (a+b)p + ab = p^2 - pc$ , więc

$$ab = p(a+b-c) = \frac{1}{2}(a+b+c)(a+b-c) = \frac{1}{2}((a+b)^2 - c^2) = \frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2 - c^2).$$

Stąd  $a^2 + b^2 = c^2$ . Z twierdzenia Pitagorasa wynika więc, że kąt  $ACB$  jest prosty.



4. Wyznaczyć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych  $(m, n)$  o następującej własności: w każde pole nieskończonej szachownicy można

wpisać liczbę ze zbioru  $A = \{1, 2, \dots, mn\}$  w taki sposób, że w każdym prostokącie o wymiarach  $m \times n$  lub  $n \times m$  (składającym się z  $mn$  pól) każda liczba ze zbioru  $A$  występuje dokładnie raz.

*Autorzy zadania:* Marta i Michał Strzeleccy

*Rozwiązanie:*

*Odpowiedź:* Pary  $(m, n)$ , dla których  $m$  dzieli  $n$  lub  $n$  dzieli  $m$ .

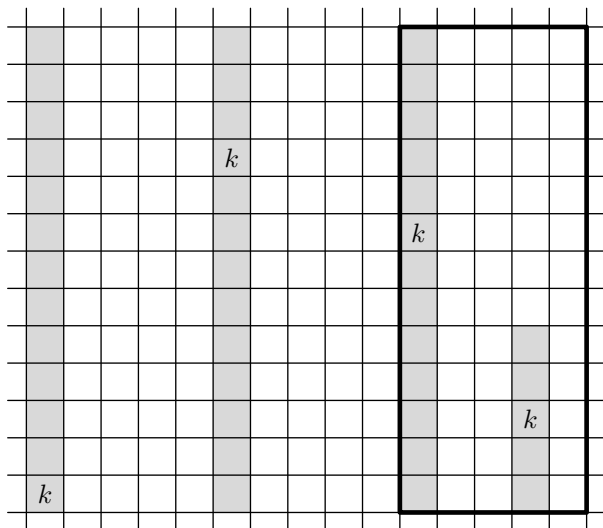
Założmy, że udało się wpisać liczby w żądany sposób. Pole w  $x$ -tej kolumnie i  $y$ -tym rzędzie będziemy nazywać *polem*  $(x, y)$ .

Dla dowolnego  $y$  całkowitego rozważmy prostokąt  $m \times n$ , którego lewym dolnym polem jest pole  $(y, 1)$  oraz prostokąt  $m \times n$ , którego lewym dolnym polem jest pole  $(y+1, 1)$ . Te dwa prostokąty mają  $m-1$  wspólnych kolumn. Ponieważ oba prostokąty zawierają ten sam zestaw liczb, więc liczby w lewej skrajnej kolumnie pierwszego prostokąta są takie same jak liczby w prawej skrajnej kolumnie drugiego prostokąta. To znaczy, że liczby wpisane w pola  $(y, 1), (y, 2), \dots, (y, n)$  są takie same jak liczby wpisane w pola  $(y+m, 1), (y+m, 2), \dots, (y+m, n)$ .

Prowadząc analogiczne rozumowanie dla prostokątów  $n \times m$  dowodzimy, że liczby wpisane w pola  $(y, 1), (y, 2), \dots, (y, m)$  są takie same jak liczby wpisane w pola  $(y+n, 1), (y+n, 2), \dots, (y+n, m)$ .

Założmy, że żadna z liczb  $m, n$  nie jest dzielnikiem drugiej. Doprowadzimy do sprzeczności. Bez ograniczenia ogólności rozumowania założymy, że  $m > n$ . Zapiszmy  $m = an + b$ , gdzie  $a$  i  $b$  są liczbami całkowitymi i  $1 \leq b \leq n-1$ . Niech  $k$  będzie liczbą wpisaną w pole  $(1, 1)$ . Korzystając wielokrotnie z poczynionej wcześniej obserwacji widzimy, że liczba  $k$  jest również wpisana w któreś z pól  $(n+1, 1), (n+1, 2), \dots, (n+1, m)$ , w któreś z pól  $(2n+1, 1), (2n+1, 2), \dots, (2n+1, m)$ , i tak dalej.

Liczba  $k$  jest zatem wpisana w któreś z pól  $(an+1, 1), (an+1, 2), \dots, (an+1, m)$ , a także w któreś z pól  $(m, 1), (m, 2), \dots, (m, n)$ . Jednakże prostokąt  $n \times m$ , którego lewym dolnym polem jest pole  $(an+1, 1)$  przykrywa oba powyższe zestawy pól — zawiera więc liczbę  $k$  dwukrotnie, co daje sprzeczność. Zatem nie istnieje żądane wpisanie liczb gdy żadna z liczb  $m, n$  nie jest dzielnikiem drugiej.



Załóżmy teraz, że  $m$  dzieli się przez  $n$  (gdy  $n$  dzieli się przez  $m$  rozumowanie jest analogiczne). Wskażemy spełniające warunki zadania przyporządkowanie liczb.

Symbolem  $a \bmod b$  będziemy oznaczać resztę z dzielenia liczby  $a$  przez  $b$ . W pole  $(x, y)$  wpisujemy liczbę

$$f(x, y) = ((x - y) \bmod m) \cdot n + (y \bmod n) + 1.$$

Tak określona liczba jest w zbiorze  $A$  dla dowolnych  $x, y$ . Na rysunku przedstawiono wypełnienie planszy za pomocą powyższego wzoru dla  $m = 6$  i  $n = 2$ .

9	11	1	3	5	7	9	11	1
12	2	4	6	8	10	12	2	4
1	3	5	7	9	11	1	3	5
4	6	8	10	12	2	4	6	8
5	7	9	11	1	3	5	7	9
8	10	12	2	4	6	8	10	12
9	11	1	3	5	7	9	11	1
12	2	4	6	8	10	12	2	4
1	3	5	7	9	11	1	3	5

Zauważmy, że  $f(x, y) = f(x', y')$  wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą

równości

$$y \bmod n = y' \bmod n \quad \text{oraz} \quad (x - y) \bmod m = (x' - y') \bmod m.$$

To zaś jest równoważne temu, że  $n$  dzieli liczbę  $y - y'$  oraz  $m$  dzieli liczbę  $x - y - (x' - y') = (x - x') - (y - y')$ .

Wykażemy, że każdy prostokąt  $m \times n$  przykrywa parami różne liczby. Należy pokazać, że jeśli  $|x - x'| < m$ ,  $|y - y'| < n$  i  $f(x, y) = f(x', y')$ , to  $x = x'$  i  $y = y'$ . Na mocy obserwacji poczynionej powyżej, liczba  $y - y'$  dzieli się przez  $n$ , a liczba  $(x - x') - (y - y')$  dzieli się przez  $m$ . Jediną liczbą o module mniejszym od  $n$  podzielną przez  $n$  jest 0 — zatem  $y - y' = 0$ . Wtedy  $(x - x') - (y - y') = x - x'$  jest podzielną przez  $m$  liczbą o module mniejszym od  $m$  — zatem  $x - x' = 0$ . Ostatecznie  $x = x'$  i  $y = y'$ .

Teraz wykażemy, że każdy prostokąt  $n \times m$  przykrywa parami różne liczby. Należy pokazać, że z warunków  $|x - x'| < n$ ,  $|y - y'| < m$  i  $f(x, y) = f(x', y')$  wynika, że  $x = x'$  i  $y = y'$ . Analogicznie jak wyżej stwierdzamy, że  $y - y'$  dzieli się przez  $n$  oraz że  $(x - x') - (y - y')$  dzieli się przez  $m$ . Liczba  $m$  dzieli się przez  $n$ , więc  $n$  dzieli liczbę  $(x - x') - (y - y')$ , a skoro  $n$  dzieli  $y - y'$ , to musi też dzielić  $x - x'$ . Ponieważ  $x - x'$  jest podzielną przez  $n$  liczbą o module mniejszym od  $n$ , więc  $x - x' = 0$ . Stąd wniosek, że liczba  $(x - x') - (y - y')$  jest równa  $y' - y$ . Jest ona podzielna przez  $m$  i ma moduł mniejszy od  $m$ , więc  $y' - y = 0$ . Otrzymaliśmy zatem  $x = x'$  i  $y = y'$ .

**5.** Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych, których nie można przedstawić w postaci  $n^2 + p$ , gdzie  $n$  jest liczbą całkowitą, a  $p$  liczbą pierwszą.

*Autor zadania:* Paweł Gadziński

*Rozwiązanie:*

Udowodnimy, że dla dowolnej nieparzystej liczby  $a \geq 3$  liczby  $\left(\frac{3a+1}{2}\right)^2$  nie można przedstawić w żądanej postaci. To jest dodatnia liczba całkowita, bo licznik ułamka  $\frac{3a+1}{2}$  jest parzysty i dodatni. Przypuśćmy nie wprost, że  $\left(\frac{3a+1}{2}\right)^2 = n^2 + p$  dla pewnej liczby całkowitej  $n$  i pewnej liczby pierwszej  $p$ . Zamieniając w razie potrzeby  $n$  na  $-n$ , możemy założyć, że  $n \geq 0$ . Mamy

$$p = \left(\frac{3a+1}{2}\right)^2 - n^2 = \left(\frac{3a+1}{2} + n\right) \left(\frac{3a+1}{2} - n\right).$$

W powyższym iloczynie pierwszy czynnik jest dodatni, więc drugi też musi być dodatni. Liczba  $p$  jest pierwsza, więc powyższa równość może zajść jedynie wtedy, gdy czynniki są równe 1 i  $p$ . Ich suma z jednej strony jest równa  $p + 1$ , a z drugiej  $\left(\frac{3a+1}{2} + n\right) + \left(\frac{3a+1}{2} - n\right) = 3a + 1$ . W konsekwencji  $3a = p$ . Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż liczba  $3a$  jest złożona, a liczba  $p$  — pierwsza.

**6.** Dany jest czworokąt wypukły  $ABCD$  wpisany w okrąg. Przekątne  $AC$  i  $BD$  przecinają się w punkcie  $P$ , przy czym  $BP = AD + DC$ . Punkt  $X$  leży na boku  $BC$ , przy czym  $BX = AC$ . Dowieść, że  $2\angle BPX = \angle ADC$ .

*Autor zadania:* Dominik Burek

*Rozwiązanie:*

Obierzmy na odcinku  $BP$  taki punkt  $Y$ , że  $BY = AD$ . Kąty  $CAD$  i  $XBY$  są równe, bo są to kąty wpisane oparte na tym samym łuku okręgu opisanego na czworokącie  $ABCD$ . Ponadto  $AC = BX$  oraz  $AD = BY$ . Z cechy przystawiania bok-kąt-bok wynika, że trójkąty  $ACD$  i  $BXY$  są przystające. W szczególności  $CD = XY$ . Zauważmy, że

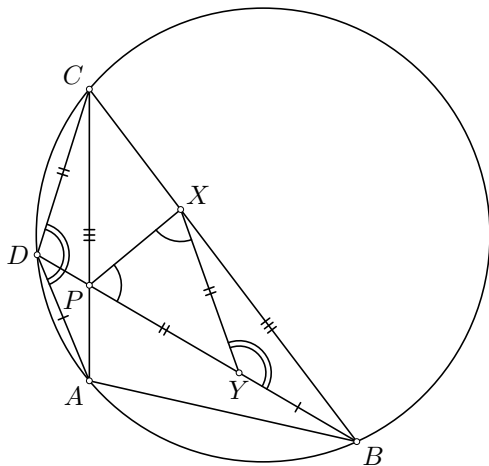
$$PY = BP - BY = AD + DC - AD = CD = XY.$$

W konsekwencji trójkąt  $PXY$  jest równoramienny i  $\angle YPX = \angle PXY$ .

Stąd

$$\angle ADC = \angle BYX = \angle YPX + \angle PXY = 2\angle BPX,$$

co było do udowodnienia.



**7.** Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych zachodzi nierówność

$$\sqrt{ab^2(b+c)} + \sqrt{bc^2(c+a)} + \sqrt{ca^2(a+b)} \leq \frac{1}{2} \sqrt{(a+b+c)^4 - (a^2+b^2+c^2)^2}.$$

*Autor zadania:* Piotr Nayar

*Rozwiązanie:*

*Sposób 1.* Oznaczmy lewą stronę i prawą stronę dowodzonej nierówności odpowiednio przez  $L$  i  $P$ . Korzystając ze wzoru

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$$

otrzymujemy  $L^2 = A + 2B$ , gdzie

$$A = ab^2(b+c) + bc^2(c+a) + ca^2(a+b)$$

oraz

$$B = \sqrt{ab^3c^2(b+c)(c+a)} + \sqrt{bc^3a^2(c+a)(a+b)} + \sqrt{ca^3b^2(a+b)(b+c)}.$$

Mamy też

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{1}{4} \left( ((a+b+c)^2)^2 - (a^2+b^2+c^2)^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( (a+b+c)^2 + (a^2+b^2+c^2) \right) \left( (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) \right) \\ &= (a^2+b^2+c^2 + ab+bc+ca)(ab+bc+ca) \\ &= A + C + D, \end{aligned}$$

gdzie

$$C = a^2b(a+b) + b^2c(b+c) + c^2a(c+a)$$

oraz

$$D = abc(b+c) + abc(c+a) + abc(a+b).$$

Wystarczy więc udowodnić, że  $2B \leq C + D$ . Z nierówności między średnimi geometryczną i arytmetyczną wynika, że

$$\begin{aligned} 2\sqrt{ab^3c^2(b+c)(c+a)} &= 2\sqrt{b^2c(b+c) \cdot abc(c+a)} \leq b^2c(b+c) + abc(c+a), \\ 2\sqrt{bc^3a^2(c+a)(a+b)} &= 2\sqrt{c^2a(c+a) \cdot abc(a+b)} \leq c^2a(c+a) + abc(a+b), \\ 2\sqrt{ca^3b^2(a+b)(b+c)} &= 2\sqrt{a^2b(a+b) \cdot abc(b+c)} \leq a^2b(a+b) + abc(b+c). \end{aligned}$$

Po dodaniu stronami powyższych nierówności otrzymujemy  $2B \leq C+D$ , co kończy dowód.

*Sposób 2.* Posłużymy się nierównością Cauchy’ego-Schwarza. Mówi ona, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  zachodzi nierówność

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} \geq a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n.$$

Przyjmijmy  $n = 3$  i połóżmy

$$a_1 = \sqrt{ab}, \quad a_2 = \sqrt{bc}, \quad a_3 = \sqrt{ca},$$

$$b_1 = \sqrt{b(b+c)}, \quad b_2 = \sqrt{c(c+a)}, \quad b_3 = \sqrt{a(a+b)}.$$

Wówczas

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = ab + bc + ca,$$

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca,$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \sqrt{ab^2(b+c)} + \sqrt{bc^2(c+a)} + \sqrt{ca^2(a+b)}.$$

Nierówność Cauchy’ego-Schwarza dla powyższego doboru liczb  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  wraz z przekształceniem prawej strony dowodzonej nierówności przedstawionym w sposobie pierwszym dowodzi więc tezy zadania.

**8.** Dany jest okrąg, w którym zaznaczono pewną skończoną liczbę cięciw. Łamaną zamkniętą złożoną z co najmniej trzech parami różnych zaznaczonych cięciw nazwiemy *cyklem*. Łamane uznajemy za takie same wtedy i tylko wtedy, gdy składają się z tego samego zbioru cięciw. Okazało się, że istnieje cykl  $\mathcal{C}$  złożony z 2022 cięciw o następującej własności: każdy cykl ma co najmniej jedną wspólną cięciwę z cyklem  $\mathcal{C}$ . Wyznaczyć największą możliwą liczbę cykli.

*Autor zadania:* Daniel Goc

*Rozwiązanie:*

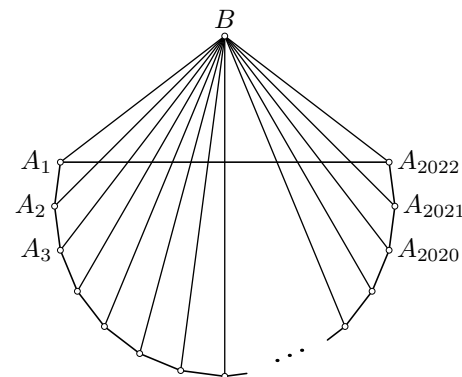
Dla każdego cyklu  $\mathcal{A}$  będziemy oznaczać przez  $f(\mathcal{A})$  zbiór wspólnych cięciw cykli  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{C}$ . Z warunków zadania wynika, że dla dowolnego cyklu  $\mathcal{A}$  zbiór  $f(\mathcal{A})$  jest niepusty. Udowodnimy, że jeśli  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{B}$  są różnymi cyklami, to  $f(\mathcal{A}) \neq f(\mathcal{B})$ .

Założmy, że  $f(\mathcal{A}) = f(\mathcal{B})$  dla pewnych dwóch różnych cykli  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{B}$ . Udowodnimy, że istnieje cykl, który nie ma żadnej wspólnej cięciwy z cyklem  $\mathcal{C}$ , co da sprzeczność z warunkami zadania. Niech  $\mathcal{D}$  będzie zbiorem tych cięciw, które występują w dokładnie jednym spośród cykli  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{B}$ . Zbiór  $\mathcal{D}$  jest niepusty, bo cykle  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{B}$  są różne. Ponadto  $\mathcal{D}$  nie zawiera żadnej cięciwy z cyklu  $\mathcal{C}$ , bo  $f(\mathcal{A}) = f(\mathcal{B})$ . Zauważmy, że koniec dowolnego odcinka z dowolnego cyklu jest końcem parzyście wielu odcinków z tego cyklu. Wynika stąd, że koniec dowolnej cięciwy jest końcem parzyście wielu odcinków z  $\mathcal{D}$  — w szczególności dowolny koniec odcinka z  $\mathcal{D}$  jest końcem co najmniej dwóch odcinków z  $\mathcal{D}$ . Wybierzmy dowolny odcinek ze zbioru  $\mathcal{D}$  i oznaczmy jego końce przez  $A_0$  i  $A_1$ . W zbiorze  $\mathcal{D}$  istnieje jakiś odcinek o końcu  $A_1$  różny od  $A_0A_1$ . Wybierzmy jeden z takich odcinków i oznaczmy jego drugi koniec przez  $A_2$ . Podobnie rozumując, w  $\mathcal{D}$  istnieje odcinek o końcu  $A_2$  różny od  $A_1A_2$ . Wybierzmy dowolny z takich odcinków i oznaczmy jego drugi koniec przez  $A_3$ . Kontynuujemy to rozumowanie do momentu, w którym wybierzemy taki odcinek  $A_{i-1}A_i$ , że  $A_i = A_j$  dla pewnego  $j < i$ . Wtedy łamana zamknięta  $A_jA_{j+1} \dots A_i$  jest cyklem niemającym żadnej wspólnej cięciwy z cyklem  $\mathcal{C}$ .

Udowodniliśmy więc, że różnym cyklom odpowiadają różne niepuste podzbiory zbioru cięciw tworzących cykl  $\mathcal{C}$ . Takich podzbiorów jest  $2^{2022} - 1$ . W takim razie liczba cykli to co najwyżej  $2^{2022} - 1$ . Pokażemy teraz, że to ograniczenie górne może być osiągnięte.

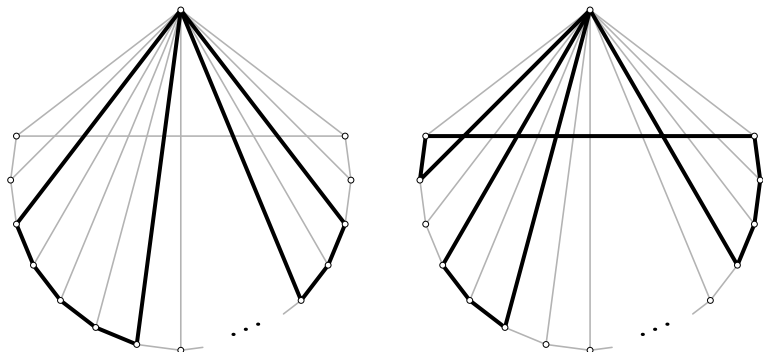
Rozważmy dowolne 2023 punkty  $A_1, A_2, \dots, A_{2022}, B$  na okręgu. Narysujmy cięciwy

$$A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{2021}A_{2022}, A_{2022}A_1, BA_1, BA_2, \dots, BA_{2022}.$$



Wówczas cykl  $\mathcal{C} = A_1A_2 \dots A_{2022}A_1$  ma własność opisaną w treści zadania.

nia. Pozostaje uzasadnić, że dla każdego niepustego podzbioru  $\mathcal{X}$  zbioru cięciw tworzących cykl  $\mathcal{C}$  istnieje cykl  $\mathcal{A}$  taki, że  $f(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$ .



Jeśli  $\mathcal{X}$  składa się ze wszystkich cięciw cyklu  $\mathcal{C}$ , to  $f(\mathcal{C}) = \mathcal{X}$ . W przeciwnym razie cięciwy w zbiorze  $\mathcal{X}$  tworzą łamane otwarte  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_k$ , przy czym końce wszystkich tych łamanych są różne, każda jest postaci  $A_i A_{i+1} \dots A_j$  dla pewnych  $i < j$ , być może poza jedną łamaną, która może być postaci  $A_i A_{i+1} \dots A_{2022} A_1 \dots A_j$  dla pewnych  $i > j$ . Wtedy cykl  $\mathcal{A} = B\mathcal{L}_1 B\mathcal{L}_2 B \dots B\mathcal{L}_k B$  spełnia  $f(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$ .