LXXII Olimpiada Matematyczna

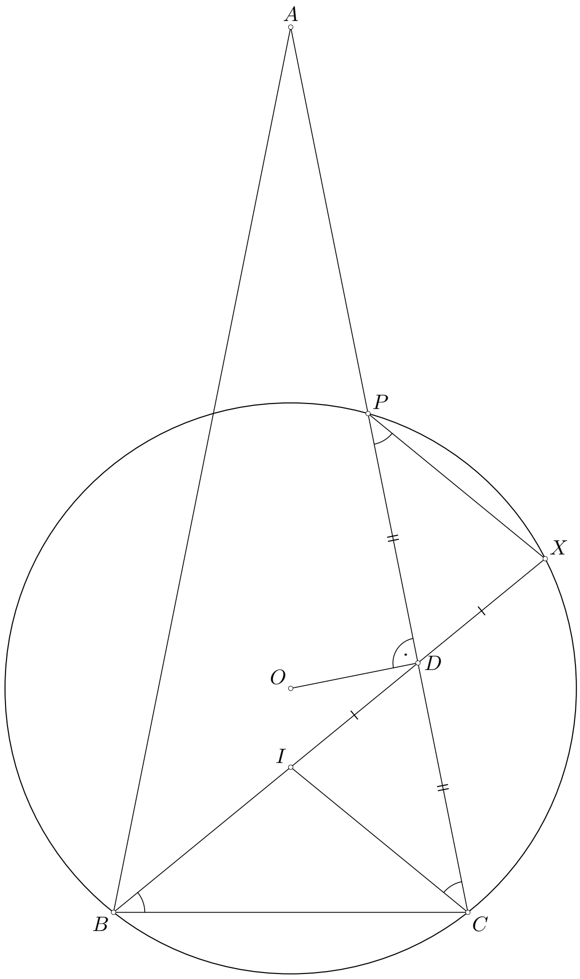
Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia pierwszego
1 października – 2 listopada 2020 r. (druga seria)

5. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $AB = AC$. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta BI przecina bok AC w punkcie D. Punkt D jest środkiem odcinka IX. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCX. Udowodnić, że proste OD i AC są prostopadłe.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez ω okrąg opisany na trójkącie BCX. Punkt D leży wewnątrz ω a punkt C na okręgu ω.



Niech P będzie drugim punktem wspólnym okręgu i prostej CD. Wtedy $\sphericalangle CBX = \sphericalangle CPX$, gdyż są to kąty wsparte na tym samym łuku. Wobec tego, korzystając z równoramienności trójkąta ABC oraz faktu, że I jest punktem wspólnym dwusiecznych kątów $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BCA$, otrzymujemy

$$\sphericalangle XPD = \sphericalangle IBC = \sphericalangle ICB = \sphericalangle ICD.$$

Ponieważ $\sphericalangle IDC = \sphericalangle XDP$, to trójkąty CDI i PDX są przystające, gdyż $ID = DX$ (cecha (bkk)). Zatem $CD = DP$, więc D jest środkiem odcinka CP.

Ostatecznie, odcinek OD łączący środek okręgu ze środkiem cięciwy, jest prostopadły do cięciwy, skąd uzyskujemy tezę $OD \perp AC$. $\square$

6. Dane są dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, d, przy czym $a, c > 1$ i $b, d < 1$. Udowodnić, że

$$\frac{a}{ab+c+1} + \frac{b}{bc+d+1} + \frac{c}{cd+a+1} + \frac{d}{da+b+1} > 1.$$

Autor zadania: Michał Kieza

Rozwiązanie:

Z warunków zadania $a > 1$ oraz $b < 1$, więc $(a-1)(b-1) < 0$, czyli $ab + 1 < a + b$. Stąd

$$\frac{a}{ab+c+1} = \frac{a}{(ab+1)+c} > \frac{a}{a+b+c} > \frac{a}{a+b+c+d}.$$

Analogicznie dostajemy nierówności

$$\frac{b}{bc+d+1} > \frac{b}{a+b+c+d}, \quad \frac{c}{cd+a+1} > \frac{c}{a+b+c+d}, \quad \frac{d}{da+b+1} > \frac{d}{a+b+c+d}.$$

Dodając je stronami mamy

$$\frac{a}{ab+c+1} + \frac{b}{bc+d+1} + \frac{c}{cd+a+1} + \frac{d}{da+b+1} >$$
$$> \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1.$$

7. W każde pole planszy 2020×2020 wpisano liczbę rzeczywistą. Spełniony jest przy tym następujący warunek: dla dowolnych czterech pól o wspólnym wierzchołku, jeśli przez a, b, c, d oznaczymy liczby wpisane w te pola jak na rysunku, to zachodzi układ równań

$$\begin{cases} a + b + 2c + 3d = 0 \\ 2a + b + 3c + 4d = 0. \end{cases}$$

a	b
c	d

Rysunek

Udowodnić, że istnieje 500 różnych pól, w które wpisano tę samą liczbę.

Autor zadania: Mariusz Skałba

Rozwiązanie:

Rozwiązując układ równań traktując b, d jako niewiadome uzyskujemy równości $b = 2a + c$, $d = -a - c$. Pola planszy będziemy oznaczać parami liczb (k, l), gdzie $1 \leqslant k, l \leqslant 2020$, przy czym pole $(1, 1)$ odpowiada lewemu górnemu rogowi planszy. Niech $k \leqslant 2016$ oraz $l \leqslant 2018$. Jeśli w pola (k, l) i $(k, l+1)$ wpisano odpowiednio liczby a i c (zgodnie z rysunkiem), to w pola $(k+1, l)$ oraz $(k+1, l+1)$ wpisano odpowiednio liczby $2a + c$ oraz $-a - c$. Powtarzając to rozumowanie otrzymujemy, że w pola $(k+2, l)$ oraz $(k+2, l+1)$ wpisano odpowiednio liczby $3a + c$ oraz $-a$. Zatem pokazaliśmy, że jeśli w pole (k, l) wpisana jest liczba a, to w pole $(k+2, l+1)$ wpisana jest liczba $-a$.

Stosując powyższą obserwację dwukrotnie otrzymujemy, że w pole $(k+4, l+2)$ wpisana jest liczba a. Zatem w pola $(1 + 4j, 1 + 2j)$ dla $0 \leqslant j \leqslant 504$ wpisane są te same liczby. Wskazaliśmy zatem 505 pól, w które wpisano tę samą liczbę.

8. Dane są takie wielomiany f_1, f_2, f_3, f_4 o współczynnikach rzeczywistych, że suma dowolnych dwóch z nich nie ma pierwiastka rzeczywistego. Udowodnić, że jeśli wielomian $f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ ma pierwiastek rzeczywisty, to co najmniej jeden z wielomianów f_1, f_2, f_3, f_4 nie ma pierwiastka rzeczywistego.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Zauważamy, że wielomian, który nie ma pierwiastka rzeczywistego, ma stały znak (czyli jest ściśle dodatni lub ściśle ujemny). Rozważmy graf pełny o wierzchołkach $1, 2, 3, 4$, którego krawędzie kolorujemy na czerwono lub niebiesko zgodnie z następującą zasadą: jeśli wielomian $f_i + f_j$ dla $i \neq j$ jest dodatni, to krawędź (i, j) kolorujemy na czerwono, a jeśli ujemny – na niebiesko.

Jeśli i, j, k, l są parami różne, to krawędzie (i, j) oraz (k, l) są pokolorowane różnymi kolorami, gdyż w przeciwnym razie funkcja $f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ miałaby stały znak, a zatem nie miałaby pierwiastka. Łatwo zauważyć, że graf ten musi mieć następującą strukturę: istnieje wierzchołek (bez straty ogólności wierzchołek 1), z którego wychodzą trzy krawędzie jednego koloru, a pozostałe krawędzie, tworzące trójkąt, są przeciwnego koloru. Stąd znaki funkcji f_1+f_2, f_1+f_3, f_1+f_4 są takie same i przeciwne do znaku funkcji f_2+f_3, f_3+f_4, f_4+f_2. Wobec tego znaki funkcji

$$(f_1+f_2)+(f_1+f_3)+(f_1+f_4)=3f_1+f_2+f_3+f_4$$

oraz

$$(f_2+f_3)+(f_3+f_4)+(f_4+f_2)=2(f_2+f_3+f_4)$$

są przeciwne, czyli znaki funkcji $3f_1+f_2+f_3+f_4$ oraz $-(f_2+f_3+f_4)$ są takie same. Sumując te dwie funkcje otrzymujemy, że wielomian $3f_1$ ma stały znak, a zatem nie ma pierwiastka rzeczywistego.

(db,tc)