LXXII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia pierwszego
1 września – 30 września 2020 r. (pierwsza seria)

1. Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi. Załóżmy, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $|(ax+by)(ay+bx)| \leqslant x^2+y^2$. Udowodnić, że $a^2+b^2 \leqslant 2$.
Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie:
Oznaczmy przez $(\star)$ nierówność

$$|(ax+by)(ay+bx)| \leqslant x^2+y^2$$

zachodzącą dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y. Podstawiając $x=1$ oraz $y=1$ w $(\star)$ otrzymujemy

$$(a+b)^2 = |(a+b)(a+b)| \leqslant 1^2+1^2 = 2. \tag{1}$$

Natomiast podstawiając $x=1$ oraz $y=-1$ w $(\star)$ dostajemy

$$(a-b)^2 = |(a-b)(-a+b)| \leqslant 1^2+(-1)^2 = 2. \tag{2}$$

Dodając stronami nierówności (1) i (2) mamy

$$2(a^2+b^2) = (a+b)^2+(a-b)^2 \leqslant 2+2 = 4.$$

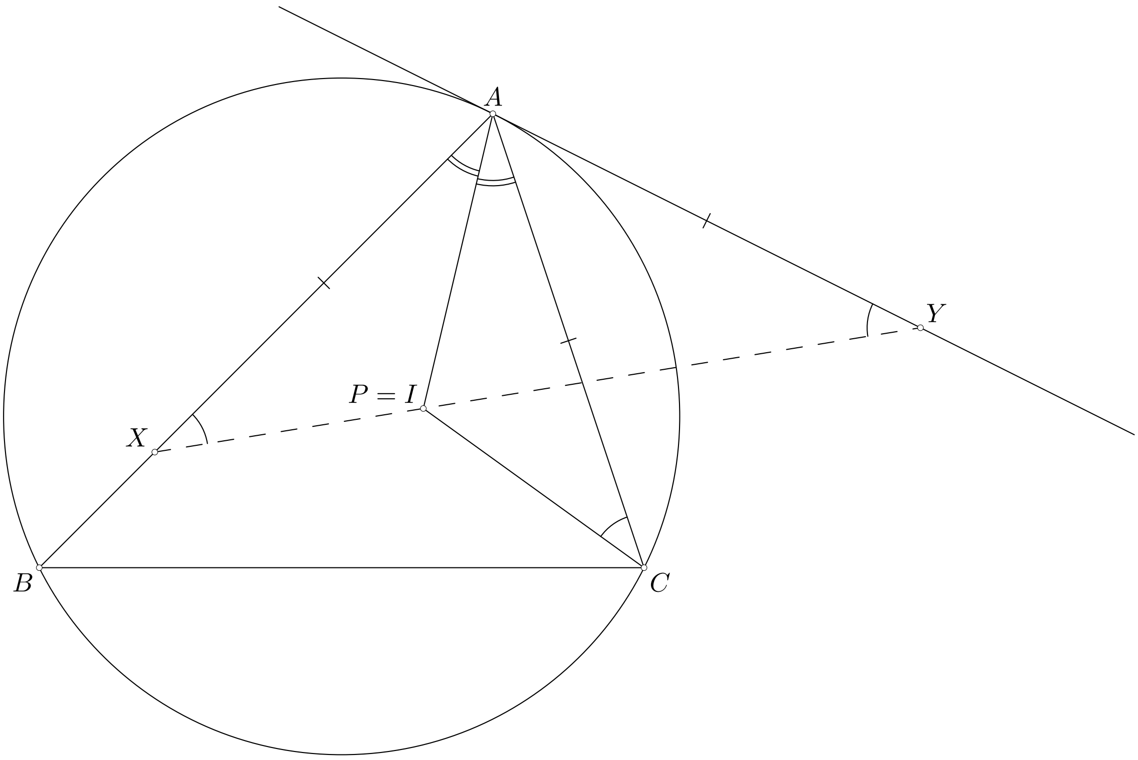
□

2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB > AC$. Niech ℓ będzie prostą styczną w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkt X leży na odcinku AB, punkt Y leży na prostej ℓ, przy czym $AX = AY = AC$ oraz punkty X i Y leżą po przeciwnych stronach prostej zawierającej dwusieczną kąta BAC. Udowodnić, że środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC leży na prostej XY.
Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:
Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC a P punktem wspólnym prostych XY i AI. Kąt między styczną a cięciwą równy jest kątowi wpisanemu opartemu na tej cięciwie, więc $180^\circ - \sphericalangle XAY = \sphericalangle BCA$. Wobec tego

$$\sphericalangle PXA = \sphericalangle YXA = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle XAY) = \frac{1}{2}\sphericalangle BCA = \sphericalangle ICA,$$

gdzie w drugiej równości skorzystaliśmy z tego, że trójkąt XAY jest równoramienny.
Trójkąty PXA i ICA mają więc takie same kąty, czyli są podobne. Ponieważ $AX = AC$, więc są przystające. Wobec tego $AP = AI$, czyli $P = I$. □



3. Załóżmy, że dodatnia liczba całkowita n nie ma żadnego dzielnika d spełniającego nierówność $\sqrt{n} \leqslant d \leqslant \sqrt[3]{n^2}$. Udowodnić, że liczba n ma dzielnik $p > \sqrt[3]{n^2}$, który jest liczbą pierwszą.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Jeśli k jest dzielnikiem liczby n, to $\frac{n}{k}$ jest również dzielnikiem liczby n. Zatem z założeń zadania wynika, że n nie ma dzielnika w przedziale $[\sqrt[3]{n}, \sqrt[3]{n^2}]$.

Niech d będzie największym dzielnikiem liczby n spełniającym $d < \sqrt[3]{n}$. Niech p będzie dowolnym dzielnikiem pierwszym liczby $\frac{n}{d}$. Wtedy dp jest dzielnikiem n. Z maksymalności d mamy $dp > \sqrt[3]{n^2}$. Zatem

$$p = \frac{dp}{d} > \frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n}} = \sqrt[3]{n}.$$

Ponieważ p jest dzielnikiem n, to $p > \sqrt[3]{n^2}$, skąd p jest szukanym dzielnikiem pierwszym n. $\square$

4. Wśród punktów płaszczyzny o obydwu współrzędnych w zbiorze $\{1, \ldots, 106\}$ niektóre punkty zaznaczono, przy czym dla każdych dwóch zaznaczonych punktów (x, y) oraz (x', y') spełniony jest co najmniej jeden z warunków:

- $x > x' - 10$ oraz $y > y' - 10$;
- $x' > x - 10$ oraz $y' > y - 10$.

Wyznaczyć największą możliwą liczbę zaznaczonych punktów.

Autor zadania: Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Niech X będzie zbiorem spełniającym warunki zadania. Rozważmy zbiory

$$L_k = \{1, 2, \ldots, 106\}^2 \cap \{(x, y) : x + y = k\}, \quad \text{gdzie } k = 2, 3, \ldots, 212.$$

Weźmy dwa dowolne punkty $(x, y), (x', y') \in X \cap L_k$. Wówczas $x - x' = y' - y$, a zatem z warunków zadania $|x - x'| < 10$. Stąd natychmiast otrzymujemy, że $|X \cap L_k| \leqslant 10$ dla $k = 2, 3, \ldots, 212$.

Oczywiście $|L_k| = k - 1$ dla $k \leqslant 107$ oraz $|L_k| = 213 - k$ dla $k > 107$. Wobec tego

$$\begin{aligned}
|X| &= \sum_{k=2}^{212} |X \cap L_k| \leqslant \sum_{k=2}^{107} \min(10, k-1) + \sum_{k=108}^{212} \min(10, 213-k) \\
&= 10 \cdot 97 + \sum_{k=2}^{10} (k-1) + 10 \cdot 96 + \sum_{k=204}^{212} (213-k) = 1930 + 2\sum_{k=1}^{9} k = 1930 + 90 = 2020.
\end{aligned}$$

To oszacowanie jest optymalne, co pokazuje przykład zbioru

$$\{1, \ldots, 10\} \times \{1, \ldots, 106\} \ \cup \ \{11, \ldots, 106\} \times \{97, \ldots, 106\}.$$

$\square$

(db,mg)