LXX Olimpiada Matematyczna

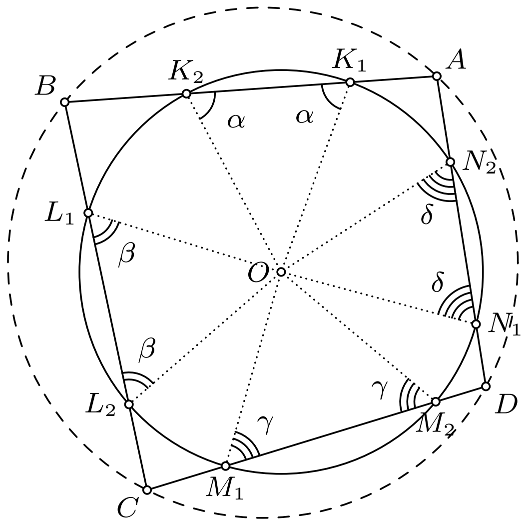
Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

8 lutego 2019 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty K_1, K_2 leżą wewnątrz boku AB, punkty L_1, L_2 leżą wewnątrz boku BC, punkty M_1, M_2 leżą wewnątrz boku CD, oraz punkty N_1, N_2 leżą wewnątrz boku DA, przy czym punkty $K_1, K_2, L_1, L_2, M_1, M_2, N_1, N_2$ są parami różne i leżą w tej kolejności na jednym okręgu ω. Niech a, b, c, d będą odpowiednio długościami łuków $N_2K_1, K_2L_1, L_2M_1, M_2N_1$ okręgu ω, niezawierających punktów K_2, L_2, M_2, N_2 odpowiednio. Wykazać, że

$$a + c = b + d.$$

Rozwiązanie:



Niech O będzie środkiem okręgu ω opisanego na punktach K_1, K_2, L_1, L_2, M_1, M_2, N_1 i N_2. Zauważmy, że teza zadania jest równoważna równości

$$\sphericalangle N_2OK_1 + \sphericalangle L_2OM_1 = \sphericalangle K_2OL_1 + \sphericalangle M_2ON_1. \qquad (1)$$

Trójkąty K_1OK_2, L_1OL_2, M_1OM_2 i N_1ON_2 są równoramienne, gdyż ich ramiona to promienie okręgu ω. Oznaczmy kąty przy podstawie w tych trójkątach odpowiednio przez α, β, γ i δ. Wtedy, wykorzystując sumę miar kątów w czworokącie OK_1AN_2 mamy

$$\begin{aligned}\sphericalangle N_2OK_1 &= 360^\circ - (\sphericalangle OK_1A + \sphericalangle BAD + \sphericalangle AN_2O) = \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \alpha + \sphericalangle BAD + 180^\circ - \delta) = \\ &= \alpha + \delta - \sphericalangle BAD.\end{aligned}$$

Analogicznie

$$\begin{aligned}\sphericalangle L_2OM_1 &= \beta + \gamma - \sphericalangle DCB, \\ \sphericalangle K_2OL_1 &= \beta + \alpha - \sphericalangle CBA, \\ \sphericalangle M_2ON_1 &= \delta + \gamma - \sphericalangle ADC.\end{aligned}$$

Równość (1), którą należy wykazać, jest równoważna równości

$$\alpha + \delta - \sphericalangle BAD + \beta + \gamma - \sphericalangle DCB = \beta + \alpha - \sphericalangle CBA + \delta + \gamma - \sphericalangle ADC,$$

która z kolei jest równoważna temu, że

$$\sphericalangle BAD + \sphericalangle DCB = \sphericalangle CBA + \sphericalangle ADC.$$

Jednakże ostatnia równość jest konsekwencją tego, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg. □

2. Wyznaczyć wszystkie pary nieujemnych liczb całkowitych x, y spełniające równość

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Jedynymi parami nieujemnych liczb całkowitych x, y spełniającymi dane równanie są: $(0,0), (9,16)$ i $(16,9)$.

Lemat: Jeżeli dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniają jedną z równości

$$\sqrt{a} = c + \sqrt{b} \qquad \text{lub} \qquad \sqrt{a} = c - \sqrt{b},$$

to a i b są kwadratami liczb całkowitych.

Dowód: Przeprowadzimy dowód w przypadku gdy zachodzi pierwsza z równości, dowód gdy zachodzi druga z równości jest analogiczny. Podnosząc obie strony do kwadratu otrzymujemy, że

$$a = c^2 + b + 2c\sqrt{b},$$

więc

$$\sqrt{b} = \frac{a - b - c^2}{2c},$$

czyli b jest kwadratem liczby wymiernej. Zauważmy, że jeżeli $b = (\frac{s}{t})^2$ dla pewnych dodatnich liczb całkowitych s, t, to $t^2 \mid s^2$, więc $t \mid s$. Oznacza to, że b jest kwadratem liczby całkowitej. Podobnie dowodzimy, że a jest kwadratem liczby całkowitej. □

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Po pierwsze odnotujmy, że jeżeli któraś z liczb x, y jest równa zero, to druga również i para $(x, y) = (0, 0)$ spełnia warunki zadania. Przyjmijmy dalej, że liczby x, y są dodatnie. Odejmując stronami $\sqrt{x+y}$ od wyjściowej równości i podnosząc do kwadratu dostajemy, że

$$(\sqrt{xy} - \sqrt{x+y})^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2.$$

Co po redukcji wyrazów podobnych daje

$$xy - 2\sqrt{xy(x+y)} = 2\sqrt{xy}.$$

Dzieląc stronami przez $\sqrt{xy}$ otrzymujemy, że

$$\sqrt{xy} - \sqrt{4(x+y)} = 2. \tag{2}$$

Z lematu wynika, że liczby xy i $4(x+y)$ są kwadratami liczb całkowitych. Ponieważ $4(x+y)$ jest kwadratem liczby całkowitej, to również $x+y$ jest kwadratem liczby całkowitej, więc liczba $\sqrt{xy} - \sqrt{x+y}$ jest całkowita. Ponownie wykorzystując lemat dla równości

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy} - \sqrt{x+y}$$

dostajemy, że x, y są kwadratami liczb całkowitych.

Równanie (2) można zapisać w postaci $2\sqrt{x+y} = \sqrt{xy} - 2$. Stąd i z równości

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

wynika, że

$$2\sqrt{xy} = \sqrt{xy} - 2 + \sqrt{x} + \sqrt{y},$$

co po przeniesieniu wszystkiego na lewą stronę i dodaniu liczby 2 do obu stron daje

$$(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{y} - 2) = 2.$$

Ponieważ liczby $\sqrt{x} \geqslant 1$ i $\sqrt{y} \geqslant 1$ są całkowite, więc $\sqrt{x} - 2 \geqslant -1$ i $\sqrt{y} - 2 \geqslant -1$, zatem albo $\sqrt{x} - 2 = 1$ i $\sqrt{y} - 2 = 2$, albo $\sqrt{y} - 2 = 1$ i $\sqrt{x} - 2 = 2$. Oznacza to, że $x = 9$ i $y = 16$ albo $x = 16$ i $y = 9$. Podstawiając uzyskane pary do wyjściowego równania stwierdzamy, że są one rozwiązaniami. □

3. Niech $f(t) = t^3 + t$. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie liczby wymierne x, y oraz dodatnie liczby całkowite m, n, że $xy = 3$ oraz

$$\underbrace{f(f(\ldots f(f}_{m \text{ razy}}(x))\ldots)) = \underbrace{f(f(\ldots f(f}_{n \text{ razy}}(y))\ldots)).$$

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Nie istnieją liczby x, y, m, n spełniające warunki zadania.

Sposób I: Niech $t = \frac{a}{b}$ będzie liczbą wymierną przedstawioną w postaci ułamka nieskracalnego tzn. $\mathrm{NWD}(a, b) = 1$. Wówczas

$$f(t) = t^3 + t = \frac{a^3}{b^3} + \frac{a}{b} = \frac{a(a^2 + b^2)}{b^3}. \tag{3}$$

Udowodnimy, że również ostatni ułamek, czyli $\frac{a(a^2+b^2)}{b^3}$ jest nieskracalny. Przypuśćmy, że dla pewnej liczby pierwszej p zachodzi

$$p \mid b^3 \quad \text{oraz} \quad p \mid a(a^2 + b^2).$$

Ponieważ $p \mid b^3$, to $p \mid b$, więc $p \nmid a$, zatem z tego, że $p \mid a(a^2 + b^2)$ wynika, że $p \mid a^2 + b^2$, ale wtedy $p \mid a^2 + b^2 - b^2 = a^2$ wbrew temu, że $p \nmid a$. Oznacza to, że $\mathrm{NWD}(a(a^2 + b^2), b^3) = 1$, więc istotnie ułamek $\frac{a(a^2+b^2)}{b^3}$ jest nieskracalny.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Ponieważ $f(t) = -f(-t)$, więc możemy bez straty założyć, że liczby x, y są dodatnie. Niech $x = \frac{a}{b}$,

$y = \frac{c}{d}$ będą odpowiednio zapisami liczb x, y w postaci ułamka nieskracalnego. Z założenia $xy = 3$ wynika, że $ac = 3bd$. Zauważmy, że przynajmniej jedna z liczb a, c nie jest podzielna przez 3. Istotnie, gdyby a i c były podzielne przez 3, to b, d byłyby niepodzielne przez 3 i lewa strona równości $ac = 3bd$ byłaby podzielna przez 9, a prawa nie. Bez straty ogólności załóżmy, że $3 \nmid a$. Wówczas $y = \frac{3}{x} = \frac{3b}{a}$. Ponieważ $3 \nmid a$ i liczby a i b są względnie pierwsze, zatem ułamek $y = \frac{3}{x}$ jest nieskracalny.

Zgodnie z powyższą obserwacją mianownik liczby $\underbrace{f(f(\ldots f(f}_{m \text{ razy}}(x))\ldots))$ zapisanej w postaci ułamka nieskracalnego wynosi b^{3^m}. Podobnie mianownik liczby $\underbrace{f(f(\ldots f(f}_{n \text{ razy}}(y))\ldots))$ zapisanej w postaci ułamka nieskracalnego wynosi a^{3^n}. Gdyby zachodziła równość żądana w zadaniu mielibyśmy $b^{3^m} = a^{3^n}$. Ponieważ liczby a, b są względnie pierwsze, więc $a = b = 1$. Wówczas $x = 1$, zatem $y = 3$. Ponieważ dla t całkowitego liczba $t^2 + 1$ nie jest podzielna przez 3, więc zachodzi równoważność

$$3 \mid f(t) = t(t^2+1) \iff 3 \mid t.$$

Wynika stąd, że

$$3 \nmid \underbrace{f(f(\ldots f(f}_{m \text{ razy}}(1))\ldots)) \quad \text{oraz} \quad 3 \mid \underbrace{f(f(\ldots f(f}_{n \text{ razy}}(3))\ldots)),$$

więc żądana równość nie może zachodzić. □

Sposób II: Zauważmy, że każdą dodatnią liczbę wymierną x można jednoznacznie zapisać w postaci $x = 3^k \cdot \frac{s}{t}$, gdzie k jest liczbą całkowitą, zaś s, t są względnie pierwszymi liczbami całkowitymi niepodzielnymi przez 3. W tej sytuacji piszemy $\nu_3(x) = k$. Nietrudno udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb wymiernych x, y zachodzą następujące zależności $\nu_3(xy) = \nu_3(x) + \nu_3(y)$ oraz $\nu_3(\frac{x}{y}) = \nu_3(x) - \nu_3(y)$.

Podobnie jak w pierwszym sposobie zakładamy bez straty, że liczby x, y są dodatnie. Niech $t = \frac{a}{b}$ będzie dodatnią liczbą wymierną zapisaną w postaci ułamka nieskracalnego. Mamy ciąg równości

$$\nu_3(f(t)) = \nu_3(t^3+t) = \nu_3\left(\frac{a(a^2+b^2)}{b^3}\right) = \nu_3(a) + \nu_3(a^2+b^2) - 3\nu_3(b).$$

Ponieważ liczby a, b są względnie pierwsze, więc przynajmniej jedna z nich jest liczbą niepodzielną przez 3, więc $3 \nmid a^2 + b^2$. Oznacza to, że $\nu_3(a^2+b^2) = 0$, więc

$$\nu_3(f(t)) = \nu_3(a) - 3\nu_3(b) \equiv \nu_3(a) - \nu_3(b) = \nu_3(t) \pmod 2.$$

Stosując otrzymaną zależność wielokrotnie otrzymujemy, że

$$\nu_3(x) \equiv \nu_3(\underbrace{f(f(\ldots f(f}_{m \text{ razy}}(x))\ldots))) \pmod 2$$

oraz

$$\nu_3(y) \equiv \nu_3(\underbrace{f(f(\ldots f(f}_{n \text{ razy}}(y))\ldots))) \pmod 2.$$

Z równości $3 = xy$, dostajemy

$$1 = \nu_3(3) = \nu_3(xy) = \nu_3(x) + \nu_3(y),$$

więc liczby $\nu_3(x)$ i $\nu_3(y)$ są różnej parzystości. Oznacza to, że liczby

$$\nu_3(\underbrace{f(f(\ldots f(f}_{m \text{ razy}}(x))\ldots))) \quad \text{i} \quad \nu_3(\underbrace{f(f(\ldots f(f}_{n \text{ razy}}(y))\ldots)))$$

są różnej parzystości, więc równość dana w zadaniu nie może zachodzić. □

LXX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

9 lutego 2019 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dane są takie dodatnie liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 3)$, że nie istnieje liczba całkowita $m > 1$ dzieląca każdą z nich. Ponadto, jeśli oznaczymy $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, to każda z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dzieli s. Udowodnić, że liczba s^{n-2} jest podzielna przez $a_1 a_2 \ldots a_n$.

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, że teza zadania nie zachodzi. Niech p będzie liczbą pierwszą dzielącą mianownik liczby

$$\frac{s^{n-2}}{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

zapisanej w postaci ułamka nieskracalnego. Ponieważ $p \mid a_1 a_2 \ldots a_n$, więc p dzieli przynajmniej jedną z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$, więc $p \mid s$. Z założenia zadania wynika, że przynajmniej jedna z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nie jest podzielna przez p. Bez straty ogólności, możemy założyć, że jest to a_n. Zauważmy, że któraś z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ nie jest podzielna przez p. Istotnie, w przeciwnym razie mielibyśmy

$$p \mid s - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) = a_n \text{ — sprzeczność.}$$

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $p \nmid a_{n-1}$. Ponieważ liczby $\frac{s}{a_1}, \frac{s}{a_2}, \ldots, \frac{s}{a_{n-2}}$ są całkowite, to mianownik liczby

$$\frac{s^{n-2}}{a_1 a_2 \ldots a_n} = \frac{s}{a_1} \cdot \frac{s}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{s}{a_{n-2}} \cdot \frac{1}{a_{n-1} a_n}$$

zapisanej w postaci ułamka nieskracalnego jest dzielnikiem $a_{n-1} a_n$, więc nie jest podzielny przez p. Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy zadania. $\square$

5. Dany jest ciąg $b_0, b_1, b_2, \ldots$ nieujemnych liczb całkowitych, przy czym wyrazy tego ciągu są parami różne, $b_0 = 0$ oraz $b_n < 2n$ dla każdej dodatniej liczby całkowitej n. Udowodnić, że dla każdej nieujemnej liczby całkowitej m istnieją takie nieujemne liczby całkowite k oraz ℓ, że

$$b_k + b_\ell = m.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy dwa przypadki ze względu na parzystość liczby m.

Niech $m = 2n - 1$ będzie liczbą nieparzystą. Rozważmy n par liczb

$$(0, 2n-1), (1, 2n-2), \ldots, (n-1, n).$$

Każdy spośród $n+1$ wyrazów $b_0, b_1, \ldots, b_n$ naszego ciągu jest mniejszy od $2n$, więc należy do którejś z wyżej wymienionych par. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że w pewnej parze obie liczby są wyrazami naszego ciągu. Ponieważ suma liczb w każdej z par wynosi $2n - 1 = m$, to teza zadania zachodzi dla m.

Niech $m = 2n$ będzie liczbą parzystą. Jeżeli n jest wyrazem naszego ciągu tzn. $b_k = n$ dla pewnego k, to $b_k + b_k = 2n = m$ i teza zadania jest spełniona dla m. W przeciwnym razie rozważmy $n-1$ par liczb

$$(1, 2n-1), (2, 2n-2), \ldots, (n-1, n+1).$$

Każdy wyraz ciągu $b_1, b_2, \ldots, b_n$ jest dodatni i mniejszy od $2n$, więc należy do którejś z wyżej wymienionych par. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że w pewnej parze obie liczby są wyrazami naszego ciągu. Ponieważ suma liczb w każdej z par wynosi $2n = m$, to teza zadania zachodzi dla m. $\square$

6. Punkt X leży wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC, przy czym

$$\sphericalangle BAX = 2\sphericalangle XBA \qquad \text{oraz} \qquad \sphericalangle XAC = 2\sphericalangle ACX.$$

Punkt M jest środkiem tego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC, który zawiera punkt A. Dowieść, że $XM = XA$.

Rozwiązanie:

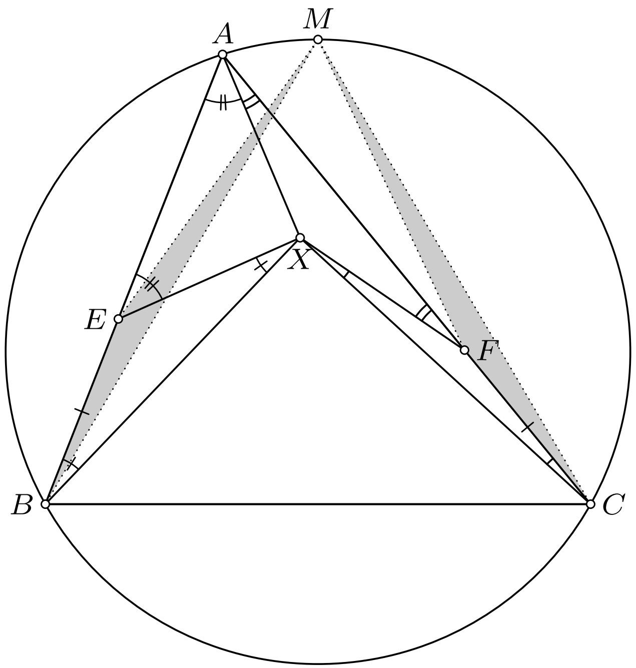
Bez szkody dla ogólności załóżmy, że $AB < AC$ (jeśli $AB = AC$, to $A \equiv M$ i teza jest oczywista). Rozważmy taki punkt E leżący na półprostej $\overrightarrow{AB}$, że $AX = EX$. Ponieważ

$$\sphericalangle XEA = \sphericalangle BAX = 2\sphericalangle XBA > \sphericalangle XBA,$$

więc punkt E leży na odcinku AB. Ponadto

$$2\sphericalangle XBE = 2\sphericalangle XBA = \sphericalangle XEA = 180^\circ - \sphericalangle BEX = \sphericalangle XBE + \sphericalangle EXB,$$

skąd $\sphericalangle XBE = \sphericalangle EXB$, czyli trójkąt EXB jest równoramienny i $EB = EX$.



Analogicznie, rozważmy punkt F leżący na półprostej $\overrightarrow{AC}$ dla którego $FX = AX$. Wówczas podobnie jak wyżej, definicja punktu F wraz z warunkami zadania implikuje, że F leży na odcinku AC oraz $FC = FX$. Wobec tego pokazaliśmy, że

$$BE = EX = AX = XF = FC. \tag{4}$$

Ponieważ M jest środkiem łuku BAC, więc $BM = MC$. Ponadto $\sphericalangle MBE = \sphericalangle MCF$, gdyż są to kąty wpisane oparte na łuku AM. Łącząc te fakty z równością $BE = CF$, na podstawie cechy przystawania (bkb) wnioskujemy, że trójkąty MBE i MCF są przystające. W szczególności $\sphericalangle EMB = \sphericalangle FMC$, a zatem

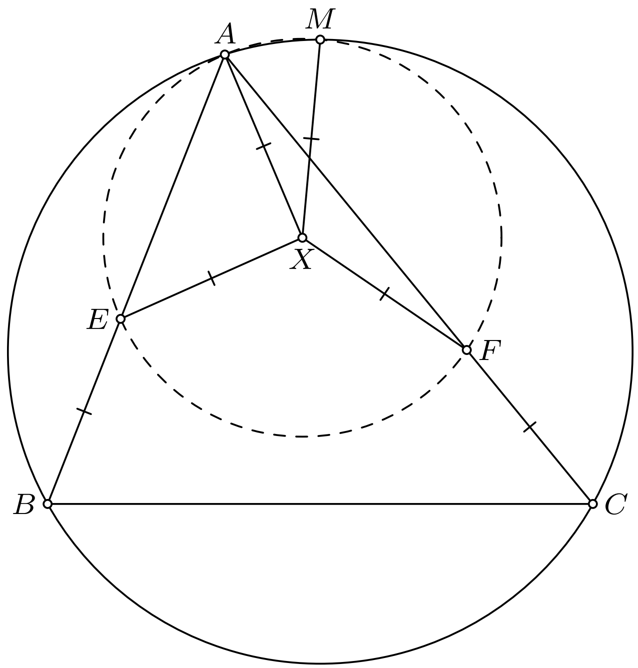
$$\sphericalangle EMF = \sphericalangle EMB + \sphericalangle BMF = \sphericalangle FMC + \sphericalangle BMF = \sphericalangle BMC.$$

Kąty wpisane BAC i BMC są równe, gdyż są oparte na łuku BC, wobec tego

$$\sphericalangle EMF = \sphericalangle BMC = \sphericalangle BAC = \sphericalangle EAF,$$

czyli punkty A, M, F i E leżą na jednym okręgu.

Równość (4) pokazuje, że punkt X jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie AFE, a ponieważ wyżej stwierdziliśmy, że na tym okręgu leży również punkt M, więc $AX = XM$.



(db,mg)