Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej

Mszana Dolna, 30 maja–12 czerwca 2021

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej
Mszana Dolna, 30 maja–12 czerwca 2021

Ośrodek Sportowo-Rekreacyjny „Słoneczny”
ul. Słoneczna 2A
34-730 Mszana Dolna
tel. 18 33 11 660

Kadra:
Piotr Ambroszczyk, Damian Burczyk, Tomasz Cieśla, Maciej Dziuba, Jacek Jakimiuk, Justyna Jaworska, Tomasz Kiełbasa, Natalia Kucharczuk, Mikołaj Leonarski, Konrad Majewski, Tomasz Ślusarczyk.

Uczestnicy:
Jakub Bartecki, Bartłomiej Bychawski, Mateusz Gabzdyl, Marianna Gołębiewska, Miron Hunia, Kosma Kasprzak, Maja Kokot, Piotr Kuc, Michał Mańka, Łukasz Orski, Gabriela Pietras, Mateusz Rajs, Krzysztof Salata, Łukasz Skiba, Jakub Słowikowski, Konstanty Smolira, Daniela Spurtacz, Marcin Stopka, Jan Zakrzewski, Marek Zbysiński.

Olimpiada Matematyczna w internecie:
`om.mimuw.edu.pl`
`www.facebook.com/OlimpiadaMatematyczna`

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej odbył się w dniach 30 maja – 12 czerwca 2021 w Mszanie Dolnej, w Ośrodku Sportowo-Rekreacyjnym „Słoneczny”. Kadrę obozu stanowili: Piotr Ambroszczyk, Damian Burczyk, Tomasz Cieśla, Maciej Dziuba, Jacek Jakimiuk, Justyna Jaworska, Tomasz Kiełbasa, Natalia Kucharczuk, Mikołaj Leonarski, Konrad Majewski i Tomasz Ślusarczyk.

W dniach 31 maja oraz 1, 2, 4, 7, 8, 9 i 10 czerwca odbyły się zawody indywidualne, 3 czerwca miały miejsce zawody drużynowe, a 5 i 11 czerwca rozegrane zostały mecze matematyczne (regulamin meczu znajduje się na końcu tego zeszytu).

Podczas każdego dnia zawodów indywidualnych uczestnicy mieli cztery i pół godziny na rozwiązanie czterech zadań. Zawody drużynowe polegały na rozwiązywaniu przez kilkuosobowe drużyny ośmiu zadań i trwały od rana do wieczora, a mecze matematyczne — od wieczora dnia poprzedniego do popołudnia.

W ramach zawodów indywidualnych można było uzyskać 192 punktów. Trzy najlepsze wyniki to 150, 144 i 101 punktów. Punkty uzyskane za poszczególne zadania przedstawia tabela na następnej stronie. W tym miejscu wypada nadmienić, że nie wszyscy uczestnicy byli na całym obozie, co powoduje, że sumy liczb w poszczególnych wierszach mogą się różnić.

W czasie obozu odbyła się wycieczka: 6 czerwca na Ćwilin i Śnieżnicę.

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania z Obozu wraz z rozwiązaniami. Zeszyty z poprzednich Obozów Naukowych znajdują się na stronie internetowej Olimpiady Matematycznej: `om.mimuw.edu.pl`.

Zadanie	Liczba prac na 6 punktów	Liczba prac na 5 punktów	Liczba prac na 2 punkty	Liczba prac na 0 punktów
1.	17	0	0	3
2.	14	0	2	4
3.	2	3	0	15
4.	2	0	1	17
5.	6	5	3	6
6.	9	4	0	7
7.	4	1	2	13
8.	1	1	0	18
9.	19	0	1	0
10.	13	3	0	4
11.	0	1	2	17
12.	1	1	0	18
13.	12	1	2	5
14.	2	2	1	15
15.	4	0	0	16
16.	0	0	1	19
17.	12	0	0	7
18.	5	0	1	13
19.	1	0	2	16
20.	0	0	1	18
21.	12	0	0	7
22.	6	3	4	6
23.	8	2	1	8
24.	4	0	1	14
25.	13	0	3	3
26.	7	0	1	11
27.	4	1	0	14
28.	0	0	3	16
29.	0	0	0	19
30.	13	0	0	6
31.	7	2	0	10
32.	0	0	0	19

Treści zadań

Zawody indywidualne

1. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, który nie jest równoległobokiem i w który nie można wpisać okręgu. Dwusieczne kątów ABC i BCD przecinają się w punkcie E, a dwusieczne kątów CDA i DAB przecinają się w punkcie F. Dwusieczne kątów ABC i DAB przecinają się w punkcie G, zaś dwusieczne kątów BCD i CDA przecinają się w punkcie H. Udowodnić, że prosta łącząca środki odcinków EF i GH jest prostopadła do prostej AB.

2. Wyznaczyć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (a, b), dla których zachodzi równość

$$2021^a = b^4 - 8b + 1.$$

3. Dane są wielomiany $P_1(x)$, $P_2(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ o współczynnikach wymiernych spełniające dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n równość

$$P_1(n) \cdot Q_1(n)^n + P_2(n) \cdot Q_2(n)^n = 0\,.$$

Wykazać, że pewien z wielomianów $P_1(x)$, $P_2(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ jest wielomianem zerowym lub $Q_1(x) = Q_2(x)$.

4. Niech $n \geqslant k$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi i niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną skończonych zbiorów o następujących własnościach:

- $\mathcal{F}$ zawiera co najmniej $\binom{n}{k} + 1$ różnych zbiorów mających dokładnie k elementów,
- dla każdych dwóch zbiorów $A, B \in \mathcal{F}$ zachodzi $A \cup B \in \mathcal{F}$.

Udowodnić, że $\mathcal{F}$ zawiera co najmniej trzy różne zbiory zawierające co najmniej n elementów.

5. Niech $\mathbb{Z}^+$ oznacza zbiór dodatnich liczb całkowitych. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Z}^+$ liczba $a^2 + f(a)f(b)$ jest podzielna przez liczbę $f(a) + b$.

6. Dany jest trójkąt ABC, w którym $2(AB - AC) = BC$. Niech D będzie takim punktem na boku BC, że $AB + BD = AC + CD$. Wykazać, że $2\sphericalangle ADC = \sphericalangle ACB$.

7. W turnieju frisbee wzięło udział $n > 2022$ drużyn. Każda drużyna zagrała z każdą dokładnie raz, nie było remisów. Wykazać, że istnieje taki ciąg niekoniecznie różnych drużyn $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$, że

- dla wszystkich $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ zachodzi $A_i \neq A_{i+1}$ oraz drużyna A_i wygrała z drużyną A_{i+1},
- dla wszystkich $i \in \{1, 2, \ldots, n-2022\}$ zachodzi $A_i \neq A_{i+2022}$ oraz drużyna A_i wygrała z drużyną A_{i+2022}.

8. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, że nierówność

$$2f(3x) + 4f(3y) \leqslant 3f(2x + 4y)$$

jest spełniona dla dowolnych $x, y \geqslant 0$.

9. Dany jest spójny graf o n wierzchołkach i m krawędziach. Wykazać, że można tak pokolorować każdy z wierzchołków danego grafu na jeden z $m - n + 3$ ustalonych kolorów, aby każde dwa wierzchołki połączone krawędzią zostały pokolorowane różnymi kolorami.

10. Dane są dodatnie liczby rzeczywiste $a_1, \ldots, a_n$ i $b_1, \ldots, b_n$, przy czym $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ oraz dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n$ spełniony jest warunek

$$a_1 + \ldots + a_k \leqslant b_1^2 + \ldots + b_k^2.$$

Udowodnić, że zachodzi nierówność

$$\frac{a_1}{b_1} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} \leqslant b_1 + \ldots + b_n.$$

11. W trójkącie nierównoramiennym ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego, zaś punkty D, E, F to punkty styczności odpowiednich okręgów dopisanych do boków BC, CA, AB. Wykazać, że okręgi AID, BIE, CIF mają punkt wspólny różny od I.

12. Niech $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych. Dane są $a, b, n \in \mathbb{Z}$, przy czym $n > 1$. Wykazać, że zbiór

$$\mathbb{Z} \setminus \{ax^n + by^n \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$$

jest nieskończony.

13. Na tablicy napisano wyrażenie

$$\max(a, b) + \max(a, c) + \max(a, d) + \max(b, c) + \max(b, d) + \max(c, d) \geqslant 0\,.$$

Mikołaj chce zastąpić m wyrażeń $\max(x, y)$ wyrażeniami $\min(x, y)$ (nie może zmienić argumentów funkcji) w taki sposób, że po zamianie wyrażenie jest prawdziwe dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d o zerowej sumie. Wyznaczyć wszystkie m, dla których Mikołaj może to zrobić.

14. Niech $\mathbb{N}$ oznacza zbiór dodatnich liczb całkowitych. Dany jest zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$, który zawiera element różny od 1. Okazało się, że dla dowolnego $n \in A$ oraz dowolnych $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \in A$ liczba

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

także należy do A. Wykazać, że istnieją takie dodatnie liczby całkowite P, Q, że dowolna liczba całkowita $n > P$ należy do A wtedy i tylko wtedy, gdy $Q | n - P$.

15. Znaleźć wszystkie wielomiany $f(n)$ o współczynnikach całkowitych spełniające dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ warunki

$$f(n) > 0 \quad \text{oraz} \quad f(n) \mid n^{n-1} - 1\,.$$

16. Dany jest trójkąt równoramienny ABC wpisany w okrąg ω, w którym $AC = BC$. Punkt M jest środkiem odcinka AB. Prosta styczna do okręgu o średnicy CM przechodząca przez B, różna od prostej BC, przecina okrąg ω po raz drugi w punkcie D. Wykazać, że istnieje okrąg styczny do prostych DC, CA, AB oraz okręgu ω.

17. Dane są względnie pierwsze liczby nieparzyste p i q. Udowodnić, że zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^{pq-1} (-1)^{\left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{q} \right\rfloor} = 1.$$

18. Dana jest dodatnia liczba całkowita n, graf G o wierzchołkach $v_1, \ldots,\ v_n$ oraz n nieujemnych liczb całkowitych $a_1, \ldots,\ a_n$. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:

a) istnieje taka orientacja krawędzi G, że dla każdego $i = 1, \ldots, n$ do wierzchołka v_i wchodzi co najwyżej a_i krawędzi,

b) dla każdego niepustego podzbioru X zbioru $\{1, \ldots, n\}$, liczba krawędzi pomiędzy wierzchołkami ze zbioru $\{v_i : i \in X\}$ jest nie większa niż suma liczb ze zbioru $\{a_i : i \in X\}$.

19. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB < AC$. Okrąg ω jest styczny do prostej AB w punkcie B oraz do odcinka AC w punkcie D. Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą BC. Okrąg ω przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w różnych punktach B i P. Udowodnić, że $\sphericalangle CPE = 2\sphericalangle ACB$.

20. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą i niech $(p_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ będzie ciągiem n^2 liczb rzeczywistych. Udowodnić, że zachodzi nierówność

$$n^2 \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} p_{i,j}^2 \leqslant \sum_{1\leqslant a,b\leqslant n} \left(\sum_{k=1}^{n} \left| \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ n|ai+bj-k}} p_{i,j} \right| \right)^2$$

21. Dany jest trójkąt ABC, w którym M jest środkiem boku BC. Udowodnić, że środki okręgów wpisanych w trójkąty ABM i ACM oraz środki okręgów dopisanych do nich, stycznych odpowiednio do boków AB i AC leżą na jednym okręgu.

22. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, dla których liczba $P(P(n)+n)$ jest pierwsza dla nieskończenie wielu liczb całkowitych n.

23. Znaleźć wszystkie funkcje $f(x)$ określone na zbiorze dodatnich liczb całkowitych i przyjmujące wartości będące liczbami rzeczywistymi, spełniające dla dowolnej trójki dodatnich liczb całkowitych a, b, c nierówność

$$f(ac) + f(bc) - f(c)f(ab) \geqslant 1.$$

24. Na pewnym obozie matematycznym rozdzielono n uczniów do k pokojów. Okazało się, że dla każdych dwóch pokojów istnieją uczeń z pierwszego pokoju i uczeń z drugiego pokoju, którzy się nie znają. Udowodnić, że można tak rozmieścić uczniów w $n-k+1$ pokojach, żeby nikt nie znał swoich współlokatorów.

25. Iloczyn dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c jest równy $(\sqrt{2}-1)^3$. Wykazać, że nie wszystkie z liczb $\frac{1}{a} - b$, $\frac{1}{b} - c$, $\frac{1}{c} - a$ są mniejsze od 2.

26. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC ($AB < AC$), w którym AH jest wysokością, AM środkową, a O jest środkiem okręgu opisanego. Symetralne boków AB i AC przecinają AH w P i Q. Niech J będzie środkiem okręgu opisanego na OPQ. Udowodnić, że $\sphericalangle CAJ = \sphericalangle BAM$.

27. Dany jest graf, którego wierzchołki mogą być kolorowane na biało lub czarno. Na początku wszystkie wierzchołki grafu są białe. W jednym ruchu możemy wybrać dowolny wierzchołek i zmienić jego kolor oraz wszystkich jego sąsiadów. Rozstrzygnąć, czy dla dowolnego grafu po skończonej liczbie ruchów można pokolorować wszystkie jego wierzchołki na czarno.

28. Niech p będzie taką liczbą pierwszą, że liczba $\frac{p-1}{2}$ także jest liczbą pierwszą. Niech a, b, c będą dowolnymi liczbami całkowitymi, niepodzielnymi przez p. Udowodnić, że istnieje co najwyżej $\sqrt{2p}+1$ dodatnich liczb całkowitych k mniejszych od p, dla których zachodzi

$$p \mid a^k + b^k + c^k.$$

29. Danych jest 1000 czerwonych torebek oraz 2021 niebieskich torebek z cukierkami. W każdej czerwonej torebce jest co najwyżej 2021 cukierków, a w każdej niebieskiej jest co najwyżej 1000 cukierków. Ponadto, łączna liczba cukierków w czerwonych torebkach jest mniejsza niż łączna liczba cukierków w niebieskich torebkach. Wykazać, że można wybrać taki niepusty podzbiór torebek T, aby łączna liczba cukierków we wszystkich czerwonych torebkach należących do T była równa łącznej liczbie cukierków we wszystkich niebieskich torebkach należących do T.

30. Danych jest n dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n$ o iloczynie równym 1. Udowodnić, że wartość wyrażenia

$$\frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \cdots + \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)}$$

jest większa bądź równa $\frac{2^n-1}{2^n}$.

31. Dana jest liczba całkowita $a_1 \geqslant 2$. Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n definiujemy wyraz ciągu a_{n+1} jako najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą, która nie jest względnie pierwsza z a_n oraz jest różna od każdej z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Wykazać, że każda liczba całkowita większa od 1 wystąpi w tym ciągu.

32. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ostrokątny ABC. Prosta l jest symetralną odcinka AI. Punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Proste AP i l przecinają się w punkcie Q. Niech R będzie takim punktem na prostej l, że $\sphericalangle IPR = 90^\circ$. Prosta k przechodząca przez środki odcinków AB i AC oraz prosta IQ przecinają się w punkcie M. Udowodnić, że $\sphericalangle AMR = 90^\circ$.

Zawody drużynowe

1. Dla dowolnej permutacji σ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ mówimy, że para $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2$ jest *odwrócona*, gdy $i < j$, ale $\sigma(i) > \sigma(j)$. Zbiór wszystkich odwróconych par permutacji σ oznaczamy przez $A(\sigma)$. Niech S_n będzie zbiorem wszystkich permutacji zbioru n-elementowego. Wykazać, że

$$\sum_{\sigma \in S_{2021}} 2021^{-|A(\sigma)|} < 3\,.$$

2. Dany jest niestały wielomian $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n definiujemy wielomian $Q_n(x)$ jako:

$$Q_n(x) = (x+1)^n P(x) + x^n P(x+1).$$

Wykazać, że istnieje jedynie skończenie wiele takich n, że $Q_n(x)$ ma komplet pierwiastków rzeczywistych.

Uwaga: Wielomian $W(x)$ ma komplet pierwiastków rzeczywistych, jeśli można go zapisać w postaci $a(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)$ dla pewnych, niekoniecznie różnych liczb rzeczywistych $a, x_1, x_2, \ldots, x_m$.

3. Dwóch graczy gra w grę z wykorzystaniem dwóch stosów monet. Początkowo pierwszy stos zawiera m monet, a drugi n monet, gdzie $m > n > 0$. Gracze naprzemiennie wykonują ruchy. W pojedynczym ruchu gracz może zabrać z jednego stosu pewną dodatnią liczbę monet będącą wielokrotnością liczby monet na drugim stosie. Wygrywa gracz, który zabierze ostatnią monetę z jednego ze stosów. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste α, dla których dla dowolnych m i n prawdziwe jest zdanie:

jeśli $m > \alpha n$, to gracz rozpoczynający ma strategię wygrywającą.

4. Udowodnić, że w grafie, w którym każdy cykl długości co najmniej 4 ma cięciwę, istnieje wierzchołek, którego sąsiedztwo jest kliką.

Uwaga: Cięciwa cyklu $A_1 A_2 \ldots A_n$ to krawędź $A_i A_j$, gdzie $|i-j| > 1$ oraz $\{i, j\} \neq \{1, n\}$. Klika to taki zbiór wierzchołków, że każde dwa z nich są połączone krawędzią (pojedynczy wierzchołek i zbiór pusty to także kliki).

5. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, zaś H jego ortocentrum. Punkt D leży na krótszym łuku BC okręgu opisanego na ABC, punkt T jest punktem przecięcia prostych AD i BC, zaś punkt E jest symetryczny do D względem T. Załóżmy, że $E \neq H$. Wykazać, że kąty OTB oraz HED są równe lub sumują się do 180°.

6. Dany jest trójkąt ABC. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą i niech $B = B_1, B_2, \cdots, B_n, B_{n+1} = C$ będą punktami leżącymi w tej kolejności na boku BC. Dla $j = 1, \ldots, n$ przez r_j oznaczmy długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt AB_jB_{j+1} oraz przez r długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Udowodnić, że istnieje λ, która nie zależy od n i dla której spełniona jest równość

$$(\lambda - r_1)(\lambda - r_2)\cdots(\lambda - r_n) = \lambda^{n-1}(\lambda - r).$$

7. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n, że liczby n, $n+1$, $n+2$ są sumami dwóch kwadratów dodatnich liczb całkowitych.

8. Dane są względnie pierwsze dodatnie liczby całkowite $n, r > 1$, przy czym n jest nieparzyste. Załóżmy, że istnieją takie wielomiany $P(x), Q(x)$ o współczynnikach całkowitych, że

$$(x-1)^n - (x^n - 1) = (x^r - 1)P(x) + nQ(x).$$

Udowodnić, że $n \mid r^{n-1} - 1$.

Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Orzec, czy istnieją takie dwa nieskończone podzbiory liczb całkowitych X i Y, że każdą liczbę całkowitą można jednoznacznie przedstawić jako $x + y$, gdzie $x \in X$ i $y \in Y$.

2. Niech $k > 1$ będzie ustaloną liczbą całkowitą. Wykazać, że istnieje taka liczba rzeczywista x, że dla każdego całkowitego $1 \leqslant n \leqslant 2021$ zachodzi

$$\{x^n\} < \{x^{n-1}\} \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad k \mid n\,,$$

gdzie przez $\{y\}$ oznaczamy część ułamkową liczby y.

3. Dane są liczby rzeczywiste $0 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_n \leqslant 1$, gdzie $n \geqslant 2$. Wykazać, że

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{a_j - a_i} \geqslant n^2\, \frac{\log_2(n/8)}{2}\,.$$

4. Dany jest graf z wyróżnionym wierzchołkiem. Dla dodatnich liczb całkowitych a, b, niech $s(a, b)$ oznacza liczbę tych podzbiorów A zbioru wierzchołków tego grafu, które spełniają następujące warunki:

- A zawiera wyróżniony wierzchołek,
- $|A| = a$,
- podgraf złożony z wierzchołków ze zbioru A jest spójny,
- wierzchołków spoza A, które sąsiadują z pewnym wierzchołkiem z A jest dokładnie b.

Udowodnić, że $s(a, b) \leqslant \binom{a+b-1}{b}$.

5. Danych jest n smerfów uwięzionych przez Gargamela oraz $2n-1$ czapek $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{2n-1}$. Gargamel zakłada każdemu smerfowi jedną z czapek. Każdy smerf widzi, jakie czapki są na głowach pozostałych $n-1$ smerfów, ale nie widzi, którą czapkę założył na jego głowę Gargamel. Następnie Gargamel pyta każdego smerfa, którą czapkę ma na głowie. Jeśli co najmniej jeden smerf odpowie poprawnie, to wszystkie smerfy zostaną wypuszczone; w przeciwnym razie pozostaną zamknięte w zamku Gargamela. Smerfy mogą ustalić strategię wcześniej, jednak po założeniu czapeczek nie mogą się komunikować (nie słyszą też odpowiedzi innych smerfów). Czy istnieje strategia gwarantująca smerfom wyjście na wolność?

6. Dany jest wielościan wypukły P, którego ściany pomalowano na niebiesko i zielono (każdą ścianę na jeden kolor) w taki sposób, że ścian niebieskich jest więcej niż zielonych, ale żadne dwie niebieskie ściany nie mają wspólnej krawędzi. Udowodnić, że w wielościan P nie da się wpisać sfery.

7. Dany jest trójkąt równoramienny ABC ($AB = AC$), w którym punkt I jest środkiem okręgu wpisanego. Niech ω będzie okręgiem przechodzącym przez C i stycznym do prostej AI w punkcie I. Oznaczmy przez Q i D punkty przecięcia okręgu ω odpowiednio z prostą AC i okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Niech M, N będą środkami odcinków odpowiednio AB oraz CQ. Dowieść, że proste AD, MN i BC przecinają się w jednym punkcie.

8. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o. Okręgi o_1 i o_2 są styczne do boku BC odpowiednio w punktach E i F, a ponadto wewnętrznie do o oraz leżą po tej samej stronie BC, co punkt A. Niech k oznacza wspólną styczną zewnętrzną do o_1 i o_2, różną od BC. Okrąg ω przechodzący przez B i C jest styczny do k w punkcie T. Okrąg ω' jest styczny do k w T oraz do BC w S. Wykazać, że prosta TS jest dwusieczną ETF.

9. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym wysokości AD i BE przecinają się w punkcie H. Niech M będzie środkiem odcinka AB. Okręgi opisane na trójkątach DEM oraz ABH przecinają się w punktach P i Q, przy czym P lezy po tej samej stronie CH, co punkt A. Udowodnić, że proste ED, PH, MQ oraz okrąg opisany na trójkącie ABC mają punkt wspólny.

10. Niech $n > 1$ będzie liczbą całkowitą i $T_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$. Przypuśćmy, że dla dowolnej nieujemnej liczby rzeczywistej t zachodzi równość $T_n\left(t + \frac{1}{t}\right) = t^n + \frac{1}{t^n}$. Udowodnić, że T_n ma współczynniki całkowite oraz dla każdego $i = 0, 1, \ldots, n-1$ zachodzi $\mathrm{NWD}(n, a_i) > 1$.

11. Niech $\mathbb{N}$ oznacza zbiór dodatnich liczb całkowitych. Dana jest funkcja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, przy czym dla dowolnych względnie pierwszych m, $n \in \mathbb{N}$ liczby $f(n)$ i $f(m)$ są względnie pierwsze, a ponadto $n \leqslant f(n) \leqslant n + 2021$. Udowodnić, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i liczby pierwszej p, jeżeli $p \mid f(n)$, to $p \mid n$.

Drugi Mecz Matematyczny

1. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ spełniające dla dowolnych $x, y > 0$ równość

$$f(x+y) = f(x)f(yf(x)).$$

2. Rozstrzygnąć, czy istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ o następujących dwóch własnościach:

- A nie zawiera rosnącego ciągu arytmetycznego długości trzy,
- dla każdego $x \notin A$ zbiór $A \cup \{x\}$ zawiera rosnący ciąg arytmetyczny długości trzy.

3. Dane są dodatnie liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$, których iloczyn wynosi 1. Wykazać, że zachodzi

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-1+x_i} \leqslant 1.$$

4. Dane są niepuste zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Wykazać, że istnieją takie niepuste rozłączne zbiory indeksów I, J, że

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{j \in J} A_j.$$

5. Danych jest n liczb całkowitych $a_1, a_2, ..., a_n$ spełniających dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant n$ warunek $i - n \leqslant a_i \leqslant i - 1$. Udowodnić, że istnieje niepusty podzbiór $S \subseteq \{1 \ldots, n\}$, dla którego

$$\sum_{i \in S} a_i = 0.$$

6. Mamy daną prostokątną tabelę o n wierszach i m kolumnach. W każde pole wpisana jest liczba rzeczywista w taki sposób, że suma liczb w każdej kolumnie i w każdym wierszu jest całkowita. Udowodnić, że można zamienić każdą liczbę x w tabeli na $\lfloor x \rfloor$ lub $\lceil x \rceil$ w taki sposób, aby sumy liczb w kolumnach i wierszach się nie zmieniły.

7. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC, a G jest jego środkiem ciężkości. Niech D będzie środkiem odcinka BC. Wysokość opuszczona z wierzchołka A przecina okrąg o średnicy BC wewnątrz trójkąta ABC w punkcie E. Proste EG i OD przecinają się w punkcie F. Na boku BC wybieramy takie punkty K, L, że $FK \parallel OB$ oraz $FL \parallel OC$. Punkt M leży na prostej AB i spełnia $MK \perp BC$, zaś punkt leży N na prostej AC i spełnia $LN \perp BC$. Wykazać, że istnieje okrąg styczny do prostych OB, OC w punktach B, C oraz do okręgu opisanego na trójkącie AMN.

8. Oznaczmy przez ω i o odpowiednio okrąg wpisany i opisany na trójkącie ABC. Niech I będzie środkiem ω. Okręgi τ_1 i τ_2 odpowiednio o środkach M i N są styczne zewnętrznie w punkcie I. Okrąg τ_1 jest styczny wewnętrznie do o w punkcie T, natomiast τ_2 jest styczny wewnętrznie do ω w punkcie S. Prosta TM przecina o w punkcie P, a prosta PN przecina o w punkcie R. Wykazać, że okrąg opisany na trójkącie RST jest styczny do ω.

9. Okrąg wpisany w trójkąt ABC ma środek w punkcie I oraz jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach D, E i F. Punkty I_B, I_C są środkami okręgów dopisanych do trójkąta ABC, odpowiednio naprzeciwko wierzchołków B i C. Punkty P i Q są środkami odcinków I_BE, I_CF. Okrąg opisany na trójkącie APC przecina AB w punkcie $R \neq A$, a okrąg opisany na trójkącie ABQ przecina AC w punkcie $S \neq A$. Wykazać, że proste PR, QS i AI przecinają się w jednym punkcie.

10. Dane są dodatnie liczby całkowite n i N. Wykazać, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita k, że liczba $2^k - n$ ma przynajmniej N różnych dzielników pierwszych.

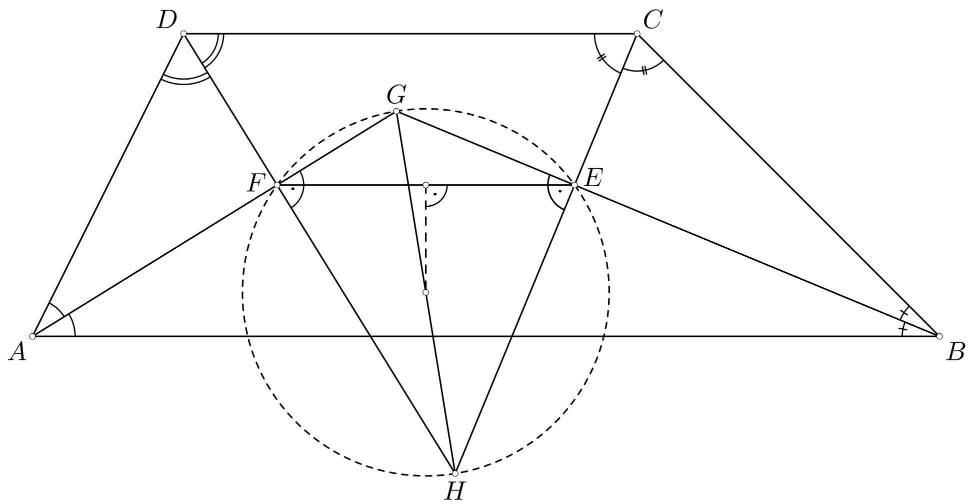
11. Dana jest dodatnia liczba całkowita a oraz liczba pierwsza $p > 3$, dla których zachodzi $p \mid a^2+a+1$. Udowodnić, że $p^3 \mid (a+1)^p - a^p - 1$.

Rozwiązania

Zawody indywidualne

1. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, który nie jest równoległobokiem i w który nie można wpisać okręgu. Dwusieczne kątów ABC i BCD przecinają się w punkcie E, a dwusieczne kątów CDA i DAB przecinają się w punkcie F. Dwusieczne kątów ABC i DAB przecinają się w punkcie G, zaś dwusieczne kątów BCD i CDA przecinają się w punkcie H. Udowodnić, że prosta łącząca środki odcinków EF i GH jest prostopadła do prostej AB.

Rozwiązanie:



Najpierw wykażemy, że punkty E i F leżą na prostej łączącej środki ramion trapezu $ABCD$. Ponieważ punkt E leży na dwusiecznej kąta ABC, to jego odległość od prostej AB jest równa odległości od prostej BC. Podobnie odległość E od prostej BC jest równa odległości od prostej CD. Wobec tego punkt E jest równoodległy od podstaw trapezu AB i CD. Stąd wynika, że leży on na linii środkowej w tym trapezie. Analogicznie dowodzimy, że leży na niej punkt F. Ponieważ linia środkowa jest równoległa do podstaw trapezu to odcinek EF też jest do nich równoległy. Zauważmy, że

$$\sphericalangle HEG = \sphericalangle BEC = 180^\circ - \sphericalangle EBC - \sphericalangle ECB = 180^\circ - \frac{1}{2}(\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD) = 90^\circ\,.$$

Podobnie wykazujemy, że kąt HFG jest prosty. Zatem na czworokącie $HEGF$ można opisać okrąg ω, zaś odcinek HG jest jego średnicą. Stąd środek tego odcinka jest środkiem okręgu ω. Ponieważ odcinek łączący środek okręgu ze środkiem pewnej cięciwy jest prostopadły do niej, to odcinek łączący środki EF i GH jest prostopadły do EF, więc jest też prostopadły do BC.

2. Wyznaczyć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (a, b), dla których zachodzi równość

$$2021^a = b^4 - 8b + 1.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ lewa strona jest liczbą nieparzystą, to b musi być parzyste. Stąd otrzymujemy

$$1 \equiv b^4 - 8b + 1 \equiv 2021^a \equiv 5^a \pmod{16}\,,$$

co oznacza, że a musi być podzielne przez 4. Zatem lewa strona jest kwadratem liczby całkowitej. Dla $b > 0$ zachodzi $b^4 - 8b + 1 < b^4$, dla $b > 4$ mamy $b^2 > 4b$, a więc $b^4 - 8b + 1 > b^4 - 2b^2 + 1 = (b^2 - 1)^2$, zatem dla takich b prawa strona leży między kwadratami dwóch kolejnych liczb całkowitych, więc nasze równanie nie może być spełnione. Jeśli $b \leqslant 4$, to

$$b^4 - 8b + 1 \leqslant 4^4 = 256 < 2021 \leqslant 2021^a\,,$$

więc równanie z treści zadania nie ma rozwiązań.

3. Dane są wielomiany $P_1(x)$, $P_2(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ o współczynnikach wymiernych spełniające dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n równość

$$P_1(n) \cdot Q_1(n)^n + P_2(n) \cdot Q_2(n)^n = 0\,.$$

Wykazać, że pewien z wielomianów $P_1(x)$, $P_2(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ jest wielomianem zerowym lub $Q_1(x) = Q_2(x)$.

Rozwiązanie:

Wielomiany z treści zadania mają wymierne współczynniki, więc istnieje taka liczba całkowita M, że wielomiany $R_1(x) = M \cdot P_1(x), R_2(x) = M \cdot P_2(x), S_1(x) = M \cdot Q_1(x), S_2(x) = M \cdot Q_2(x)$ mają współczynniki będące liczbami całkowitymi. Ponadto dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi

$$R_1(n)S_1(n)^n + R_2(n)S_2(n)^n = M^{n+1}(P_1(n)Q_1(n)^n + P_2(n)Q_2(n)^n) = 0\,.$$

Czyli wielomiany $R_1(x)$, $R_2(x)$, $S_1(x)$, $S_2(x)$ również spełniają założenia zadania oraz oczywiście widać, że jeżeli teza zadania zachodzi dla $R_1(x)$, $R_2(x)$, $S_1(x)$, $S_2(x)$, to zachodzi również dla $P_1(x)$, $P_2(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$. Zatem w dalszej części rozwiązania możemy bez straty ogólności założyć, że $P_1(x)$, $P_2(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ mają współczynniki całkowite.

Jeżeli pewien wielomian spośród $P_1(x)$, $P_2(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ jest wielomianem zerowym, to w oczywisty sposób teza zadania zachodzi. Załóżmy więc, że tak nie jest. Wtedy istnieje takie n_0, że dla każdego $n > n_0$ zachodzi $P_1(n)P_2(n)Q_1(n)Q_2(n) \neq 0$. Udowodnimy, że dla każdego $a > n_0$ zachodzi $Q_1(a) = Q_2(a)$, z czego będzie wynikać teza zadania. Weźmy dowolne $a > n_0$. Niech k będzie dowolną nieujemną liczbą całkowitą i niech p będzie dowolną liczbą pierwszą. Wstawiając w równości z treści zadania $n = a + kp$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 &= P_1(a+kp)Q_1(a+kp)^{a+kp} + P_2(a+kp)Q_2(a+kp)^{a+kp} \\ &\equiv_p P_1(a)Q_1(a)^a Q_1(a)^{kp} + P_2(a)Q_2(a)^a Q_2(a)^{kp} \\ &\equiv_p P_1(a)Q_1(a)^a Q_1(a)^{k} + P_2(a)Q_2(a)^a Q_2(a)^{k} \\ &\equiv_p P_1(a)Q_1(a)^{a+k} + P_2(a)Q_2(a)^{a+k}\,, \end{aligned}$$

przy czym przedostatnie przejście wynika z Małego Twierdzenia Fermata. Oznaczmy

$$f(a,k) = P_1(a)Q_1(a)^{a+k} + P_2(a)Q_2(a)^{a+k}.$$

Ponieważ $f(a,k)$ jest podzielne przez dowolną liczbę pierwszą, zatem jest równe 0, w szczególności $f(a,0) = f(a,1) = 0$. Korzystając z tego, że $Q_2(a)P_1(a) \neq 0$ otrzymujemy

$$\left(\frac{Q_1(a)}{Q_2(a)}\right)^a = -\frac{P_2(a)}{P_1(a)} = \left(\frac{Q_1(a)}{Q_2(a)}\right)^{a+1}\,,$$

więc $Q_1(a) = Q_2(a)$.

4. Niech $n \geqslant k$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi i niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną skończonych zbiorów o następujących własnościach:

- $\mathcal{F}$ zawiera co najmniej $\binom{n}{k} + 1$ różnych zbiorów mających dokładnie k elementów,

- dla każdych dwóch zbiorów $A, B \in \mathcal{F}$ zachodzi $A \cup B \in \mathcal{F}$.

Udowodnić, że $\mathcal{F}$ zawiera co najmniej trzy różne zbiory zawierające co najmniej n elementów.

Rozwiązanie:

Niech V będzie sumą mnogościową wszystkich zbiorów w rodzinie $\mathcal{F}$. Zbiór $A \in \mathcal{F}$ o dokładnie k elementach nazwiemy *generatorem*. Rozwiążemy zadanie przez indukcję po k. Jeżeli $k = 1$, do $\mathcal{F}$ należy co najmniej $n+1$ zbiorów o jednym elemencie, oznaczmy je $\{a_1\},\ \{a_2\},\ \ldots,\ \{a_{n+1}\}$. W takim razie zbiory

$$\begin{aligned} X_1 &= \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\}, \\ X_2 &= \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_{n+1}\}, \\ X_3 &= \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n+1}\} \end{aligned}$$

także należą do $\mathcal{F}$, są parami różne i każdy z nich ma co najmniej n elementów, co kończy rozwiązanie dla $k = 1$. Załóżmy teraz, że $k \geqslant 2$.

Przypuśćmy, że pewien $a \in V$ należy do co najmniej $\binom{n-1}{k-1} + 1$ generatorów. Niech $\mathcal{F}' = \{S \in \mathcal{F} \mid a \in S\}$ oraz niech $\mathcal{G} = \{S \setminus \{a\} \mid S \in \mathcal{F}'\}$. Wtedy $\mathcal{G}$ zawiera przynajmniej $\binom{n-1}{k-1} + 1$ zbiorów o dokładnie $k-1$ elementach i dla dowolnych $A, B \in \mathcal{G}$ zachodzi $A \cup B \in \mathcal{G}$. W takim razie na mocy założenia indukcyjnego istnieją różne zbiory $X_1,\ X_2,\ X_3 \in \mathcal{G}$, z których każdy ma co najmniej $n-1$ elementów. Z definicji G wynika, że żaden zbiór spośród $X_1,\ X_2,\ X_3$ nie zawiera a oraz że zbiory $X_1 \cup \{a\},\ X_2 \cup \{a\},\ X_3 \cup \{a\} \in \mathcal{F}$ są trzema różnymi zbiorami zawierającymi co najmniej n elementów, co kończy rozwiązanie zadania w tym przypadku.

Załóżmy więc, że dowolny $a \in V$ należy do co najwyżej $\binom{n-1}{k-1}$ generatorów. Oznacza to, że rodzina generatorów niezawierających a zawiera co najmniej

$$\binom{n}{k} + 1 - \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{k} + 1$$

generatorów, więc ich suma mnogościowa ma co najmniej n elementów. Oznacza to, że dla dowolnego $a \in V$ rodzina $\mathcal{F}$ zawiera zbiór X_a niezawierający a o co najmniej n elementach. Ustalmy $a \in V$, niech $b \in X_a$. Wtedy zbiory $X_a,\ X_b,\ V$ są parami różne $(a,\ b \in V)$, wszystkie należą do V i mają co najmniej n elementów co kończy rozwiązanie zadania.

5. Niech $\mathbb{Z}^+$ oznacza zbiór dodatnich liczb całkowitych. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Z}^+$ liczba $a^2 + f(a)f(b)$ jest podzielna przez liczbę $f(a) + b$.

Rozwiązanie:

Łatwo sprawdzić, że funkcja f dana wzorem $f(n) = n$ spełnia warunki zadania. Pokażemy, że jest to jedyne rozwiązanie. Oznaczmy przez $P(a, b)$ podzielność $f(a) + b \mid a^2 + f(a)f(b)$. Wstawiając $P(1, 1)$, otrzymujemy $f(1) + 1 \mid 1 + f(1)^2$. Zatem liczba $f(1) + 1$ dzieli także liczbę

$$\big(1 + f(1)^2\big) - (f(1) + 1)(f(1) - 1) = \big(1 + f(1)^2\big) - \big(f(1)^2 - 1\big) = 2.$$

Stąd otrzymujemy, że $f(1) = 1$. Z własności $P(1, b)$ dostajemy $1 + b \mid 1 + f(b)$, więc $f(b) \geqslant b$ dla każdego b. Dalsze rozumowanie może przebiegać na kilka sposobów.

Sposób I

Udowodnimy indukcyjnie, że $f(a) = a$. Wiemy już, że $f(1) = 1$. Załóżmy, że $f(a-1) = a-1$. Wtedy z własności $P(a, a-1)$ zachodzi $f(a) + a - 1 \mid a^2 + f(a)(a-1)$. Zatem liczba $f(a) + a - 1$ dzieli także liczbę

$$\big(a^2 + f(a)(a-1)\big) - (f(a) + a - 1)(a-1) = \big(a^2 + f(a)(a-1)\big) - \big(f(a)(a-1) + a^2 - 2a + 1\big) = 2a - 1.$$

Stąd $f(a) + a - 1 \leqslant 2a - 1$, czyli $f(a) \leqslant a$. Z drugiej strony wiemy, że $f(a) \geqslant a$. Zatem $f(a) = a$, co kończy dowód indukcyjny.

Sposób II

Z własności $P(a, 1)$ dostajemy $f(a) + 1 \mid a^2 + f(a)$, stąd liczba $f(a) + 1$ dzieli także liczbę

$$\big(a^2 + f(a)\big) - (f(a) + 1) = a^2 - 1,$$

więc $f(a) \leqslant a^2 - 2$ dla każdego a. Niech p będzie dowolną liczbą pierwszą. Z własności $P(p, f(p))$ otrzymujemy $2f(p) \mid p^2 + f(p)f(f(p))$, stąd $f(p) \mid p^2$, czyli $f(p) \in \{1,\ p,\ p^2\}$. Ponieważ $p \leqslant f(p) \leqslant p^2 - 2$, to $f(p) = p$ dla dowolnej liczby pierwszej p.

Wstawiając $a = p$ do $P(a, b)$, gdzie p jest liczbą pierwszą, otrzymujemy $p + b \mid p^2 + pf(b)$. Zatem liczba $p + b$ dzieli liczbę

$$\big(p^2 + pf(b)\big) - (p + b)(f(b) + p - b) = \big(p^2 + pf(b)\big) - \big(pf(b) + bf(b) + p^2 - b^2\big) = b^2 - bf(b).$$

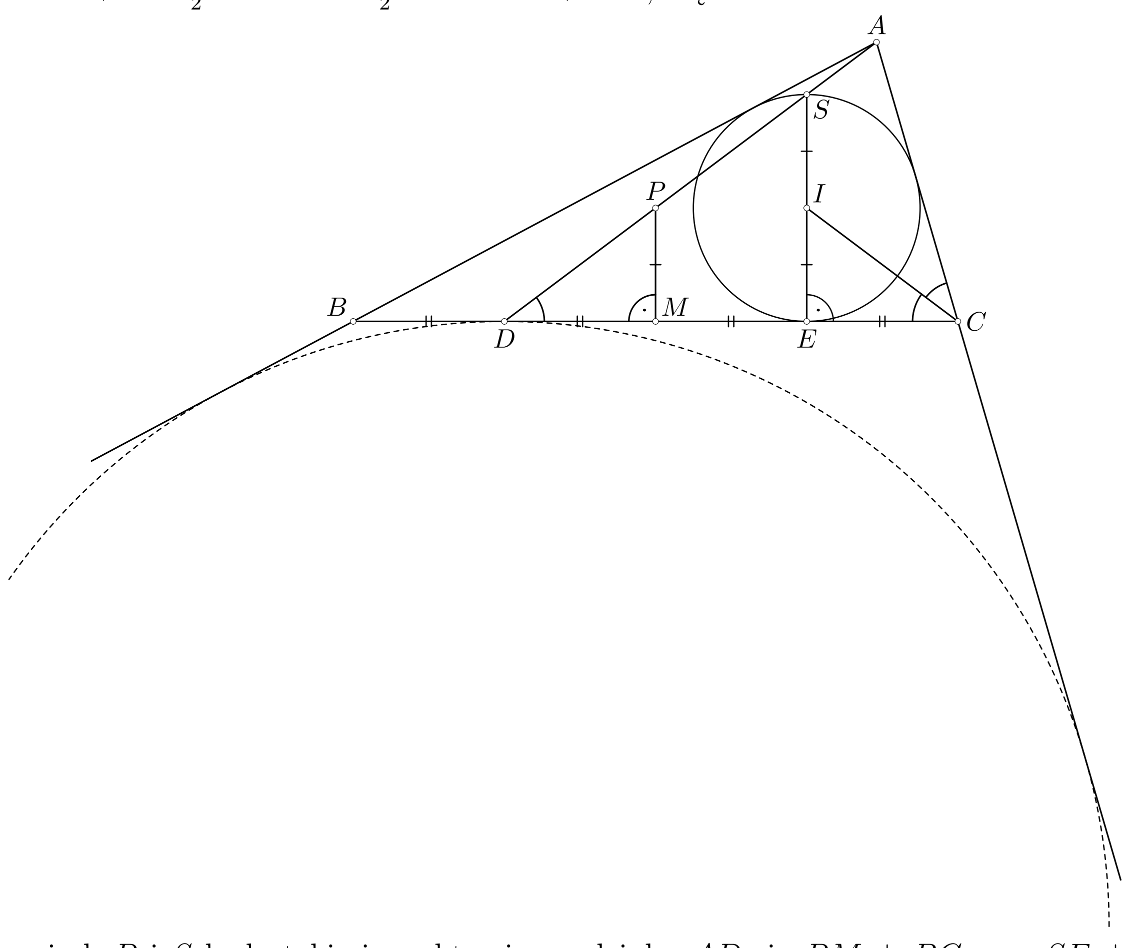
Dla ustalonego b liczba $p + b$ może być dowolnie duża, zatem $b^2 - bf(b) = 0$. Wobec tego $f(b) = b$ dla każdego b.

6. Dany jest trójkąt ABC, w którym $2(AB - AC) = BC$. Niech D będzie takim punktem na boku BC, że $AB + BD = AC + CD$. Wykazać, że $2\sphericalangle ADC = \sphericalangle ACB$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez $E,\ I,\ M$ odpowiednio punkt styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC do boku BC, środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz środek boku BC.

Niech D' będzie punktem styczności okręgu dopisanego do ABC do boku BC. Wtedy $AB + BD' = AB + CE = AB + \frac{BC+AC-AB}{2} = \frac{AB+AC+BC}{2} = AC + CD'$, stąd $D = D'$.



Ponadto niech P i S będą takimi punktami na odcinku AD, że $PM \perp BC$ oraz $SE \perp BC$. Jednokładność o środku w A przeprowadzająca okrąg wpisany na okrąg dopisany przeprowadza prostą IE

na prostą przechodzącą przez punkt D i prostopadłą do BC. Stąd wynika, że punkt S leży na okręgu wpisanym w ABC, czyli SE jest średnicą tego okręgu. Zatem $PM = \frac{1}{2}SE = IE$.

Oczywiście $AB > AC$, więc $B,\ D,\ E,\ C$ leżą w tej kolejności na boku BC. Wreszcie, wykorzystując założenie w treści zadania otrzymujemy:

$$EM = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}(CD - CE) = \frac{1}{2}(BE - CE)$$

$$= \frac{1}{4}((BC + AB - AC) - (BC + AC - AB)) = \frac{1}{4}(2(AB - AC)) = \frac{1}{4}BC.$$

Zatem $DM = EM = EC$, więc trójkąty DMP i CEI są przystające, stąd

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle ICE = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB.$$

7. W turnieju frisbee wzięło udział $n > 2022$ drużyn. Każda drużyna zagrała z każdą dokładnie raz, nie było remisów. Wykazać, że istnieje taki ciąg niekoniecznie różnych drużyn $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$, że

- dla wszystkich $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ zachodzi $A_i \neq A_{i+1}$ oraz drużyna A_i wygrała z drużyną A_{i+1},
- dla wszystkich $i \in \{1, 2, \ldots, n-2022\}$ zachodzi $A_i \neq A_{i+2022}$ oraz drużyna A_i wygrała z drużyną A_{i+2022}.

Rozwiązanie:

Jeżeli drużyna X wygrała z drużyną Y, oznaczymy to poprzez $X \to Y$. Ciąg m drużyn $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_m$, taki że $B_1 \to B_2 \to B_3 \to \cdots \to B_m \to B_1$ nazwiemy *cyklem długości* m. Ponadto przyjmiemy, że każdy jednoelementowy ciąg drużyn jest *cyklem długości* 1. Wykażemy najpierw następujący lemat:

Lemat 1. *Jeżeli istnieje cykl długości m, to dla dowolnego $3 \leqslant k \leqslant m$ istnieje cykl długości k.*

Dowód. Niech $B_1 \to B_2 \to B_3 \to \cdots \to B_m \to B_1$ będzie cyklem długości m i niech $\mathcal{B} = \{B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_m\}$. Dowód poprowadzimy przez indukcję po k. Niech najpierw $k = 3$. Przypuśćmy, że nie istnieje cykl długości 3. Zauważmy, że jeżeli $B_1 \to B_l$, to $B_1 \to B_{l+1}$, gdyż w przeciwnym razie B_1, B_l, B_{l+1} tworzyłyby cykl długości 3. Stosując to rozumowanie dla $l = 2,\ 3,\ \ldots, m-2$, dochodzimy do wniosku, że $B_1 \to B_{m-1}$, więc B_1, B_{m-1}, B_m to cykl długości 3.

Niech teraz $4 \leqslant k < m$. Z założenia indukcyjnego istnieje cykl $C_1 \to C_2 \to \cdots \to C_{k-1} \to C_1$ długości $k-1$, przy czym $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{k-1} \in \mathcal{B}$. Oznaczmy też $\mathcal{C} = \{C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{k-1}\}$. Niech $X \in \mathcal{B}$ będzie drużyną spoza $\mathcal{C}$. Załóżmy, że X wygrał z pewną drużyną C_i, zaś przegrał z pewną drużyną C_j. Możemy przenumerować drużyny w $\mathcal{C}$, tak, że $C_1 \to X$ oraz $C_1 \to C_2 \to \cdots \to C_{k-1} \to C_1$. Niech t będzie najmniejszą liczbą naturalną, taką że $X \to C_t$. Wtedy istnieje cykl długości k:

$$C_1 \to C_2 \to \cdots \to C_{t-1} \to X \to C_t \to C_{t+1} \to \cdots \to C_{k-1} \to C_1.$$

Załóżmy więc, że każdy $X \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{C}$ wygrał ze wszystkimi drużynami w $\mathcal{C}$ lub przegrał ze wszystkimi drużynami w $\mathcal{C}$. Załóżmy teraz, że istnieją takie drużyny $X,\ Y \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{C}$, że X wygrała ze wszystkimi drużynami w $\mathcal{C}$, Y przegrała za wszystkimi drużynami w $\mathcal{C}$ oraz $Y \to X$. Wtedy ponownie istnieje cykl długości k:

$$C_1 \to C_2 \to \cdots \to C_{k-2} \to Y \to X \to C_1\,,$$

gdyż $k \geqslant 3$. Pozostaje więc do rozważenia przypadek, gdy $\mathcal{B} \setminus \mathcal{C}$ można przedstawić jako sumę dwóch rozłącznych zbiorów $\mathcal{C}_+$ i $\mathcal{C}_-$, takich że dla dowolnych $C \in \mathcal{C}$, $X \in \mathcal{C}_+$ oraz $Y \in \mathcal{C}_-$ mamy $X \to C \to Y$

oraz $X \to Y$. Skoro $k < m$, to przynajmniej jeden ze zbiorów $\mathcal{C}_+$ i $\mathcal{C}_-$ jest niepusty – załóżmy, że jest to $\mathcal{C}_+$. Skoro $\mathcal{C},\ \mathcal{C}_+ \subseteq \mathcal{B}$ oraz $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}_+$ są niepuste, to istnieje drużyna $B_i \in \mathcal{C}$, taka że $\mathcal{B}_{i+1} \in \mathcal{C}_+$ (przyjmujemy tutaj $B_{m+1} = B_1$). Jednakże $\mathcal{B}_i \to \mathcal{B}_{i+1}$ przeczy własnościom $\mathcal{C}_+$. Dowód w przypadku, gdy $\mathcal{C}_-$ jest niepusty przebiega analogicznie. □

Silnie spójnym zbiorem nazwiemy taki zbiór drużyn $\mathcal{X}$, że dla dowolnych drużyn $X_1,\ X_2 \in \mathcal{X}$ zachodzi $X_1 \to X_2$ lub istnieje $t \in \mathbb{Z}_+$ oraz istnieją parami różne drużyny $Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_t \in \mathcal{X} \setminus \{X_1, X_2\}$, takie że

$$X_1 \to Y_1 \to Y_2 \to \cdots \to Y_t \to X_2\,.$$

W rozwiązaniu pomocny będzie następujący fakt dotyczący zbiorów silnie spójnych w turniejach.

Lemat 2. *Jeżeli $\mathcal{X}$ jest silnie spójnym zbiorem drużyn, to istnieje cykl zawierający wszystkie drużyny z $\mathcal{X}$.*

Dowód. Niech $C_1 \to C_2 \to \cdots \to C_k \to C_1$ będzie najdłuższym cyklem w zbiorze $\mathcal{X}$ ($C_i \in \mathcal{X}$) i niech $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_k\}$. Przypuśćmy, że $k < |\mathcal{X}|$. Wówczas – w podobny sposób jak w Lemacie 1 – wykażemy, że powyższy cykl można wydłużyć, co będzie sprzeczne z jego definicją.

Jeżeli istnieje drużyna $X \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{C}$ taka, że $C_i \to X$ oraz $X \to C_j$ dla pewnych i, j, to istnieje indeks t taki, że $C_t \to X$ oraz $X \to C_{t+1}$ (przyjmujemy $C_{k+1} = C_1$). Wówczas w $\mathcal{X}$ istnieje cykl długości $k+1$ powstały przez wstawienie drużyny X pomiędzy drużyny C_t i C_{t+1} w początkowym cyklu.

W takim razie każda drużyna ze zbioru $\mathcal{X} \backslash \mathcal{C}$ należy albo do zbioru $\mathcal{C}_+ = \{X \mid X \to C$ dla każdego $C \in \mathcal{C}\}$, albo do zbioru $\mathcal{C}_- = \{X \mid C \to X$ dla każdego $C \in \mathcal{C}\}$. Ponieważ $k < |\mathcal{X}|$, przynajmniej jeden z tych zbiorów jest niepusty. Bez straty ogólności rozważmy drużynę $X \in \mathcal{C}_+$. Skoro zbiór $\mathcal{X}$ jest silnie spójny, to aby istniała ścieżka od C_1 do X, musi istnieć drużyna $Y \in \mathcal{C}_-$ taka, że $Y \to X$. Wówczas w zbiorze $\mathcal{X}$ istnieje cykl długości $k+2$:

$$C_1 \to Y \to X \to C_2 \to \cdots \to C_k \to C_1,$$

co kończy dowód lematu. □

Wróćmy do rozwiązania naszego zadania. Możemy podzielić wszystkie drużyny biorące udział w turnieju na parami rozłączne maksymalne (pod względem inkluzji) zbiory silnie spójne $\mathcal{X}_1,\ \mathcal{X}_2,\ \ldots,\ \mathcal{X}_m$. Na mocy Lematu 2 w każdym z tych zbiorów istnieje cykl zawierający wszystkie drużyny tego zbioru, więc jeżeli któryś zbiór $\mathcal{X}_i$ miałby co najmniej 2021 elementów, to na mocy Lematu 1 w turnieju istniałby cykl długości 2021: $B_0 \to B_1 \to \cdots \to B_{2020} \to B_1$. Możemy wtedy zdefiniować $A_i = B_r$, gdzie r jest resztą z dzielenia i przez 2021. Nietrudno sprawdzić, że jest to szukany ciąg drużyn.

Załóżmy teraz, że wszystkie $\mathcal{X}_i$ mają mniej niż 2021 elementów. Skoro są one zbiorami maksymalnymi, to nie istnieje cykl zawierający drużyny z różnych zbiorów. Oznacza to, że możemy tak ponumerować zbiory silnie spójne, że po wybraniu dowolnych $X_i \in \mathcal{X}_i$ dla $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$ mamy $X_i \to X_j$ dla $i < j$. Niech teraz $X_{i,1} \to X_{i,2} \to \cdots \to X_{i,n_i} \to X_{i,1}$ będzie cyklem zawierającym wszystkie drużyny zbioru $\mathcal{X}_i$. Ustalmy

$$(A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n) = (X_{1,1},\ X_{1,2},\ \cdots,\ X_{1,n_1},\ X_{2,1},\ X_{2,2},\ \ldots,\ X_{2,n_2},\ X_{3,1},\ \ldots,\ X_{m,n_m})\,.$$

Po prawej stronie każda drużyna biorąca udział w turnieju pojawia się dokładnie raz, zaś takich drużyn jest n. Zauważmy, że z definicji $X_{k,l}$ mamy $A_i \to A_{i+1}$ dla $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n-1\}$. Ponadto skoro $|\mathcal{X}_k| < 2021$, to A_i oraz A_{i+2022} należą do różnych zbiorów silnie spójnych, więc zgodnie z poprzednimi obserwacjami $A_i \to A_{i+2022}$, co kończy rozwiązanie zadania.

8. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, że nierówność

$$2f(3x) + 4f(3y) \leqslant 3f(2x + 4y)$$

jest spełniona dla dowolnych $x, y \geqslant 0$.

Rozwiązanie:

Przez $P(a, b)$ będziemy oznaczać wstawienie do wyjściowej nierówności $x := a$ i $y := b$.

Oczywiście nierówność jest spełniona dla f postaci $f(x) = ax$ dla dowolnej nieujemnej liczby rzeczywistej a. Wykażemy, że wszystkie szukane funkcje f są tej postaci.

Podstawiając $x = y = 0$ otrzymujemy $3f(0) \geqslant 6f(0)$, czyli $f(0) = 0$. Przypuśćmy, że istnieje $x > 0$ taki, że $f(x) = 0$. Wówczas biorąc $y \leqslant \frac{3}{2}x$ i wstawiając $P\left(\frac{y}{3}, \frac{x}{4} - \frac{y}{6}\right)$ oraz korzystając z nieujemności f mamy

$$0 = 3f(x) \geqslant 2f(y) + 4f\left(\frac{3}{4}\left(x - \frac{2}{3}y\right)\right) \geqslant 2f(y) \geqslant 0\,.$$

W takim razie w powyższych nierównościach wszędzie zachodzą równości, w szczególności $f(y) = 0$. To pokazuje, że $f \equiv 0$ na $\left[0, \frac{3}{2}x\right]$ oraz dla każdej dodatniej liczby całkowitej n mamy $f(\left(\frac{3}{2}\right)^n x) = 0$. Ponieważ liczba $\left(\frac{3}{2}\right)^n x$ może być dowolnie duża, to równość $f \equiv 0$ musi zachodzić na całym zbiorze $[0, \infty)$.

Załóżmy teraz, że dla dowolnego $x > 0$ zachodzi $f(x) > 0$. Jeśli $x, y \geqslant 0$ są takie, że $y \geqslant \frac{4}{3}x$, to

$$f(y) \geqslant \frac{4}{3}f(x) + \frac{2}{3}f\left(\frac{3}{2}\left(y - \frac{4}{3}x\right)\right) \geqslant \frac{4}{3}f(x)\,.$$

Powtarzając to rozumowanie n-krotnie otrzymujemy, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi implikacja

$$y \geqslant \left(\frac{4}{3}\right)^n x \Rightarrow f(y) \geqslant \left(\frac{4}{3}\right)^n f(x).$$

W podobny sposób dla $y \leqslant \frac{3}{2}x$ możemy podstawić $P\left(\frac{y}{3}, \frac{3x}{4} - \frac{y}{2}\right)$ i otrzymać

$$f(y) \leqslant f(y) + 2f\left(\frac{3}{4}\left(x - \frac{2}{3}y\right)\right) \leqslant \frac{3}{2}f(x)\,.$$

W takim razie

$$y \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n x \Rightarrow f(y) \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n f(x)\,.$$

Przypuśćmy teraz, że f nie jest postulowanej postaci, to znaczy że istnieją takie liczby $x, y > 0$ oraz $0 < b < a$, że $f(x) = ax$ oraz $f(y) = by$. Wówczas, jeżeli weźmiemy takie dodatnie liczby całkowite m, n, że $\left(\frac{3}{2}\right)^m y \geqslant \left(\frac{4}{3}\right)^n x$, to biorąc dowolne z, dla którego $\left(\frac{3}{2}\right)^m y \geqslant z \geqslant \left(\frac{4}{3}\right)^n x$ i stosując powyżej udowodnione implikacje otrzymujemy, że $\left(\frac{3}{2}\right)^m by \geqslant f(z) \geqslant \left(\frac{4}{3}\right)^n ax$. Przekształcając te nierówności do postaci

$$\frac{y}{x} \geqslant \left(\frac{4}{3}\right)^n \left(\frac{3}{2}\right)^{-m} \quad \text{oraz} \quad \frac{y}{x} \cdot \frac{b}{a} \geqslant \left(\frac{4}{3}\right)^n \left(\frac{3}{2}\right)^{-m}$$

dochodzimy do wniosku, że jeśli tylko znajdziemy takie dodatnie liczby całkowite m, n, że

$$\frac{y}{x} \geqslant \left(\frac{4}{3}\right)^n \left(\frac{3}{2}\right)^{-m} > \frac{y}{x} \cdot \frac{b}{a},$$

to otrzymamy sprzeczność kończącą dowód.

W dalszej części rozwiązania skorzystamy z następującego lematu.

Lemat (Twierdzenie Dirichleta o aproksymacji)**.** *Niech α będzie liczbą niewymierną i niech N będzie dodatnią liczbą całkowitą. Wtedy istnieją liczby całkowite p i q, dla których $|q\alpha - p| < \frac{1}{N}$.*

Dowód. Ponieważ α jest liczbą niewymierną, to całkowite wielokrotności α są parami różne. Zatem z zasady szufladkowej, wśród liczb $0, \alpha, 2\alpha, \ldots, N\alpha$ istnieją takie dwie, że ich części ułamkowe różnią się o mniej niż $\frac{1}{N}$. Wtedy istnieją liczby całkowite p, q spełniające $|q\alpha - p| < \frac{1}{N}$. □

Wracając do rozwiązania zadania, logarytmując (przy podstawie 2) ostatnią nierówność, otrzymujemy równoważną postać

$$\log_2\left(\frac{y}{x}\right) \geqslant (2n+m) - (n+m)\log 3 > \log_2\left(\frac{y}{x}\right) + \log_2\left(\frac{b}{a}\right).$$

Z lematu otrzymujemy, że istnieją liczby całkowite p, q, dla których $|q - p\log_2 3| < -\log_2\left(\frac{b}{a}\right)$. Wtedy dla pewnej liczby całkowitej k zachodzi

$$\log_2\left(\frac{y}{x}\right) \geqslant k(q - p\log_2 3) > \log_2\left(\frac{y}{x}\right) + \log_2\left(\frac{b}{a}\right).$$

Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} 2n+m = kq \\ n+m = kp \end{cases}$$

otrzymujemy $n = k(q-p)$, $m = 2kp - kq$. Zauważmy, że $1 < \log_2 3 < 2$, więc w lemacie możemy położyć $N > \max\left(\frac{1}{2-\log_2 3}, \frac{1}{\log_2 3 - 1}\right)$, dzięki czemu

$$q < p\log_2 3 + \frac{1}{N},$$

$$\frac{q}{p} < \log_2 3 + \frac{1}{pN} < 2 - \frac{1}{N} + \frac{1}{pN} < 2$$

a także

$$q > p\log_2 3 - \frac{1}{N},$$

$$\frac{q}{P} > \log_2 3 - \frac{1}{Np} > 1 + \frac{1}{N} - \frac{1}{Np} > 1,$$

wobec czego $2p > q$ oraz $q > p$, dzięki czemu $m,\ n > 0$. Kończy to dowód istnienia postulowanych liczb m, n i rozwiązanie zadania.

9. Dany jest spójny graf o n wierzchołkach i m krawędziach. Wykazać, że można tak pokolorować każdy z wierzchołków danego grafu na jeden z $m - n + 3$ ustalonych kolorów, aby każde dwa wierzchołki połączone krawędzią zostały pokolorowane różnymi kolorami.

Rozwiązanie:

Ponieważ dany graf G jest spójny, istnieje w nim drzewo rozpinające T, czyli taki zbiorem $n-1$ krawędzi grafu G, że pomiędzy dwoma różnymi wierzchołkami grafu istnieje dokładnie jedna ścieżka wykorzystująca krawędzie z T.

Zaczniemy od pokolorowania wierzchołków G dwoma kolorami tak, aby każda krawędź $e \in T$ łączyła wierzchołki o różnych kolorach. Ustalmy pewien wierzchołek r grafu G. Dla każdego wierzchołka v rozważmy ścieżkę od r do v wykorzystującą tylko krawędzie drzewa T i niech $d(v)$ będzie liczbą krawędzi na tej ścieżce (z własności drzewa rozpinającego jest tylko jedna taka ścieżka). Przypiszmy wierzchołkowi v kolor 1, jeśli $d(v)$ jest nieparzyste, albo kolor 2, jeśli $d(v)$ jest parzyste. Rozważmy dwa różne wierzchołki v i u połączone krawędzią z drzewa T. Twierdzimy, że wierzchołki te otrzymały różne kolory. Bez straty ogólności załóżmy, że $d(v) \leqslant d(u)$. Niech $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$, będzie ścieżką w G taką, że $v_0 = r$, $v_k = v$ oraz $v_i v_{i+1} \in T$. Ponieważ $d(v) \leqslant d(u)$, to $u \neq v_i$ dla $i = 0, \ldots, k$. Stąd $(v_0, v_1, \ldots, v_k, u)$ jest poprawną ścieżką w G od r do u, która wykorzystuje tylko krawędzie z T. Ponieważ ścieżka ta jest o 1 dłuższa od ścieżki do r do v, to wierzchołki u i v musiały otrzymać różne kolory.

Niech teraz $e_1, e_2, \ldots, e_{m-(n-1)}$ będą wszystkimi krawędziami grafu, które nie należą do T. Niech x_i będzie jednym z końców krawędzi e_i i niech $X = \{x_i \mid i = 1, \ldots, m-(n-1)\}$. Przemalujmy wierzchołki z X w taki sposób, aby każdy wierzchołek z X otrzymał inny, unikalny kolor. Wykażemy, że w ten sposób otrzymamy szukane kolorowanie grafu. Zauważmy, że $|X| \leqslant m-(n-1)$, więc sumarycznie użyjemy co najwyżej $2+m-(n-1) = m-n+3$ kolorów. Ponadto każda krawędź w grafie albo należy do T i na mocy pierwszej części jej końce otrzymają różne kolory (które mogą zostać zmienione, ale tylko na unikalne kolory), albo nie należy do T i wtedy jeden z jej końców należy do X, a stąd wierzchołek ten otrzyma kolor inny niż każdy z pozostałych wierzchołków.

10. Dane są dodatnie liczby rzeczywiste $a_1, \ldots, a_n$ i $b_1, \ldots, b_n$, przy czym $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ oraz dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n$ spełniony jest warunek

$$a_1 + \ldots + a_k \leqslant b_1^2 + \ldots + b_k^2.$$

Udowodnić, że zachodzi nierówność

$$\frac{a_1}{b_1} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} \leqslant b_1 + \ldots + b_n.$$

Rozwiązanie:

Sposób I

W rozwiązaniu pomocny będzie następujący lemat.

Lemat 1 (Przekształcenie Abela)**.** *Niech $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ będą liczbami rzeczywistymi i niech $Y_k = \sum_{i=1}^{k} y_i$ dla $k = 1, \ldots, n$. Wtedy zachodzi tożsamość:*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) Y_k + x_n Y_n.$$

Dowód. Ustalmy indeks k i porównajmy współczynniki stojące przy x_k po obu stronach powyższego równania. Po lewej stronie tym współczynnikiem jest y_k. Jeśli $k = 1$, to współczynnik przy x_1 po prawej stronie jest równy $Y_1 = y_1 = y_k$. Jeśli $k > 1$, to współczynnik przy x_k po prawej stronie jest równy

$$-Y_{k-1} + Y_k = -(y_1 + \ldots + y_{k-1}) + (y_1 + \ldots + y_{k-1} + y_k) = y_k$$

Otrzymujemy stąd, że wyrażenia po obu stronach badanej równości są sobie równe. □

Wróćmy do rozwiązania zadania. Rozważmy wyrażenie

$$\sum_{k=1}^{n} \left(b_k - \frac{a_k}{b_k} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} \left(b_k^2 - a_k \right).$$

Stosując do powyższej sumy przekształcenie Abela ($x_k = \frac{1}{b_k}$, $y_k = b_k^2 - a_k$), otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n} \left(b_k - \frac{a_k}{b_k} \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+1}} \right) \left(\sum_{i=1}^{k} (b_i^2 - a_i) \right) + \frac{1}{b_n} \left(\sum_{i=1}^{n} (b_i^2 - a_i) \right)$$

Z założeń zadania wiemy, że $\frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+1}} \geqslant 0$ (ponieważ $b_k \leqslant b_{k+1}$), a ponadto sumy wyrażeń postaci $b_k^2 - a_k$ są nieujemne. Stąd otrzymujemy, że $\sum_{k=1}^{n} (b_k - \frac{a_k}{b_k}) \geqslant 0$, co należało wykazać.

Sposób II

Po pomnożeniu obustronnie przez b_1 i przeniesieniu na jedną stronę dowodzona nierówność przyjmuje postać

$$(b_1^2 - a_1)\frac{b_1}{b_1} + (b_2^2 - a_2)\frac{b_1}{b_2} + \ldots + (b_n^2 - a_n)\frac{b_1}{b_n} \geqslant 0.$$

Zdefiniujmy $f(x_1, \ldots, x_n) = (b_1^2 - a_1)x_1 + \ldots + (b_n^2 - a_n)x_n$. Wobec założenia $0 < b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ wystarczy wykazać, że jeśli $1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n > 0$, to $f(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$. Zaczniemy od udowodnienia następującego lematu:

Lemat 2. *Niech liczby $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ będą takie, że $f(x_1, \ldots, x_n), f(y_1, \ldots, y_n) \geqslant 0$. Wówczas dla dowolnego $t \in [0, 1]$ zachodzi $f(z_1(t), \ldots, z_n(t)) \geqslant 0$, gdzie $z_i(t) = tx_i + (1-t)y_i$.*

Dowód. Funkcja $t \mapsto f(z_1(t), \ldots, z_n(t))$ jest liniowa, zatem teza lematu jest prostym wnioskiem z własności funkcji liniowych. □

Wykażemy przez indukcję po m, że dla dowolnych liczb $x_1, \ldots, x_m$ takich, że $1 = x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_m > 0$ zachodzi $f(x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \geqslant 0$ (na pierwszych m pozycjach są kolejno liczby $x_1, \ldots, x_m$, na następnych l ($0 \leqslant l \leqslant n-m$) jest x_m, na ostatnich $n-m-l$ jest 0). Podstawiając $m = n$, otrzymamy stąd tezę zadania.

Dla $m = 1$ dostajemy

$$f(x_1, \ldots, x_1, 0, \ldots, 0) = f(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) = \sum_{k=1}^{l}(a_k^2 - b_k^2),$$

co jest nieujemne z założeń zadania. Przypuśćmy, że $m > 1$. Z założenia indukcyjnego dla dowolnego $0 \leqslant l \leqslant n-m$ mamy $f(x_1, \ldots, x_{m-1}, 0, \ldots, 0) \geqslant 0$ oraz $f(x_1, \ldots, x_{m-1}, \ldots, x_{m-1}, 0, \ldots, 0) \geqslant 0$ (ostatnie x_{m-1} na pozycji $m+l$), zatem z lematu zastosowanego do powyższych nierówności dla $t = \frac{x_m}{x_{m-1}}$ wynika, że $f(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \geqslant 0$.

Sposób III

Rozwiążemy zadanie w przypadku ogólniejszym, gdy liczby a_i mogą być niedodatnie. Dla $n = 1$ teza pokrywa się z założeniem. Niech więc $n \geqslant 2$ i ustalmy $1 \leqslant l \leqslant n-1$. Rozważmy przekształcenie $a_l \to a_l + x,\ a_{l+1} \to a_{l+1} - x$ dla nieujemnej liczby rzeczywistej x. Wobec założenia $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$ widzimy, że lewa strona tezy nie maleje przy takim przekształceniu. Założenie dla $k < l$ i $k > l$ się nie zmienia. Jeżeli więc weźmiemy

$$x = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_l^2 - a_1 - a_2 - \cdots - a_l \geqslant 0\,,$$

to lewa strona tezy nie maleje, wszystkie założenia pozostaną spełnione, zaś w założeniu dla $k = l$ zachodzi równość. Stosując to przekształcenie kolejno dla $l = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$ dochodzimy do wniosku, że na końcu lewa strona tezy nie zmalała, w założeniach dla $k \leqslant n-1$ jest równość, zaś założenie dla $k = n$ jest nadal spełnione. Wystarczy więc wykazać następujący fakt.

Lemat. *Dane są liczby rzeczywiste $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ oraz dodatnie liczby rzeczywiste $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ przy czym $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ oraz dla każdego $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$ spełniony jest warunek*

$$a_1 + \cdots + a_k = b_1^2 + \cdots + b_k^2\,,$$

a także

$$a_1 + \cdots + a_n \leqslant b_1^2 + \cdots + b_n^2\,.$$

Wówczas zachodzi nierówność

$$\frac{a_1}{b_1} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \leqslant b_1 + \cdots + b_n\,.$$

Dowód. Z założenia w oczywisty sposób wynika, że $a_i = b_i^2$ dla $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$ oraz $a_n \leqslant b_n^2$. W takim razie

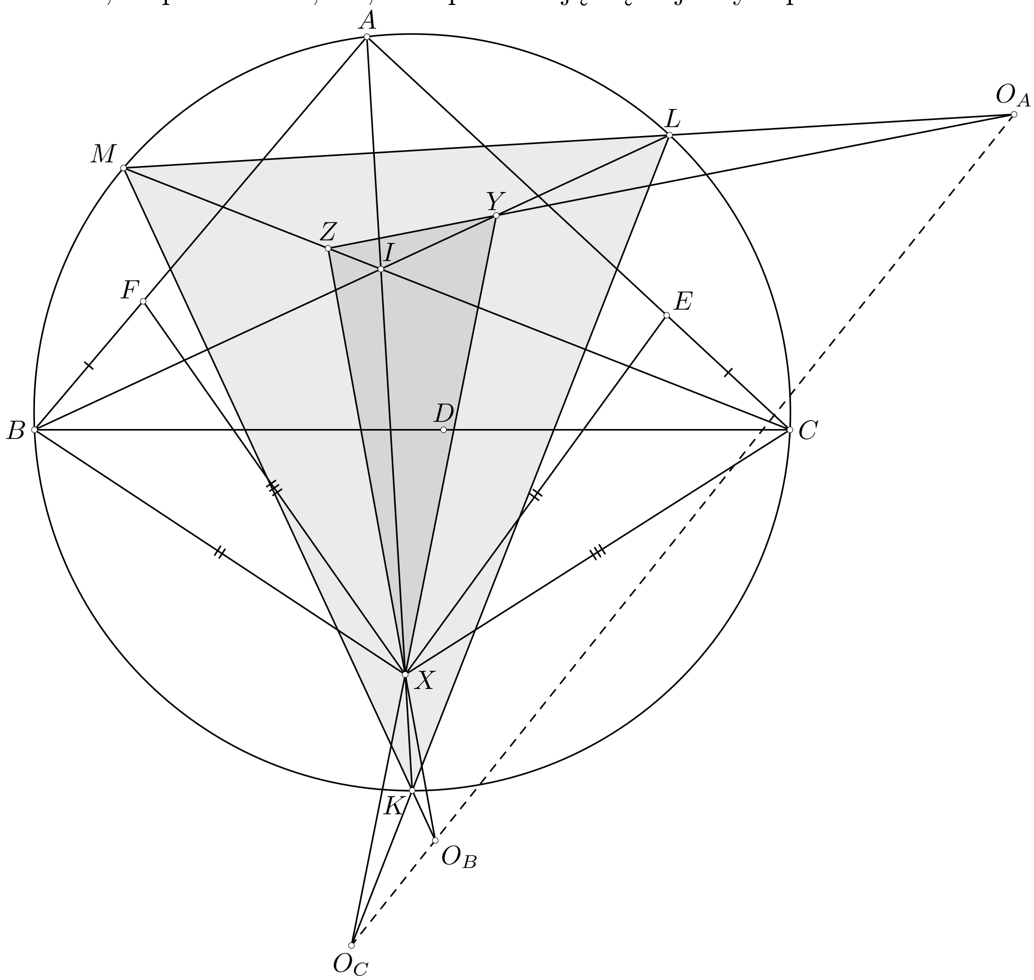
$$\frac{a_1}{b_1} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} = b_1 + \cdots + b_{n-1} + \frac{a_n}{b_n} \leqslant b_1 + \cdots + b_n\,,$$

co kończy dowód faktu i rozwiązanie zadania. □

11. W trójkącie nierównoramiennym ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego, zaś punkty D, E, F to punkty styczności odpowiednich okręgów dopisanych do boków BC, CA, AB. Wykazać, że okręgi AID, BIE, CIF mają punkt wspólny różny od I.

Rozwiązanie:

Oznaczmy środki okręgów opisanych na trójkątach AID, BIE, CIF odpowiednio przez O_A, O_B, O_C. Teza jest równoważna temu, że punkty O_A, O_B, O_C są współliniowe. Niech a, b, c, x, y, z będą symetralnymi odcinków odpowiednio AI, BI, CI, AD, BE, CF. Niech $K = b \cap c$, $L = c \cap a$, $M = a \cap b$, $X = y \cap z$, $Y = z \cap x$, $Z = x \cap y$. Korzystając z twierdzenia Desarguesa dla trójkątów KLM i XYZ sprowadzamy tezę do udowodnienia, że proste KX, LY, MZ przecinają się w jednym punkcie.



Udowodnimy, że każda spośród tych trzech prostych przechodzi przez punkt I. Punkt K z lematu o trójliściu leży na dwusiecznej kąta BAC, zatem wystarczy wykazać, że X również leży na tej dwusiecznej. Zauważmy, że $BX = EX, CX = FX$, ponadto znanym faktem jest, że $BF = CE$. Zatem trójkąty XBF oraz XEC są przystające, więc X jest tak samo odległy od prostych BF i CE. Analogicznie dowodzimy, że I leży na prostych LY oraz MZ, co kończy dowód.

12. Niech $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych. Dane są $a, b, n \in \mathbb{Z}$, przy czym $n > 1$. Wykazać, że zbiór

$$\mathbb{Z} \setminus \{ax^n + by^n \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$$

jest nieskończony.

Rozwiązanie:

Niech p będzie dowolnym dzielnikiem pierwszym n. Wystarczy udowodnić, że zbiór

$$S := \mathbb{Z} \setminus \{ax^p + by^p \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$$

jest nieskończony, bo zbiór z treści zadania zawiera S.

W rozwiązaniu wykorzystamy kilka razy następującą obserwację.

Spostrzeżenie. *Jeżeli dla pewnej dodatniej liczby całkowitej m i pewnej liczby całkowitej $0 \leqslant r < m$, dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Z}$ zachodzi $ax^p + by^p \not\equiv r \pmod m$, to zbiór S jest nieskończony, bo zawiera wszystkie liczby całkowite przystające do r modulo m.*

Najpierw udowodnimy, że jeżeli x i y dają tę samą resztę z dzielenia przez p, to x^p i y^p dają tę samą resztę z dzielenia przez p^2. Zauważmy, że jeżeli $x \equiv y \pmod p$, to $p \mid x - y$ i również

$$\sum_{i=0}^{p-1} x^i y^{p-1-i} \equiv \sum_{i=0}^{p-1} x^{p-1} = p \cdot x^{p-1} \equiv 0 \pmod p,$$

stąd $p^2 \mid x^p - y^p$, więc $x^p \equiv y^p \pmod{p^2}$. Stąd

$$R := \{ax^p + by^p \pmod{p^2} \mid x, y \in \mathbb{Z}\} = \{ax^p + by^p \pmod{p^2} \mid x, y \in \{0, 1, \ldots, p-1\}\}.$$

Jeżeli R ma mniej niż p^2 elementów, to teza zadania zachodzi na mocy spostrzeżenia. Załóżmy zatem, że $|R| = p^2$, wtedy widzimy że $p^2 \mid ax^p + by^p$ wtedy i tylko wtedy gdy $p \mid x, y$. Zatem jeżeli $p^2 \mid ax^p + by^p$, to również $p^p \mid ax^p + by^p$. Jeżeli $p \geqslant 3$, to znaczy że $ax^p + by^p$ nie może przyjmować reszty p^2 modulo p^3, więc na mocy spostrzeżenia zbiór S jest nieskończony.

Pozostaje rozpatrzeć przypadek $p = 2$. Zauważmy, że $x^2 \pmod 8$ ma tylko trzy możliwe wartości, tj. 0,1,4. Jeżeli $4 \mid x^2, y^2$, to również $4 \mid ax^2 + by^2$. Zauważmy, że takich różnych par $(x^2 \pmod 8), y^2 \pmod 8)$), że $4 \nmid x^2$ lub $4 \nmid y^2$ jest tylko 5, zaś reszt modulo 8, które nie są podzielne przez 4 jest aż 6. Zatem któraś z nich nie jest przyjmowana przez wyrażenie $ax^2 + by^2$, więc na mocy spostrzeżenie zbiór S jest nieskończony, co kończy dowód.

13. Na tablicy napisano wyrażenie

$$\max(a, b) + \max(a, c) + \max(a, d) + \max(b, c) + \max(b, d) + \max(c, d) \geqslant 0\,.$$

Mikołaj chce zastąpić m wyrażeń $\max(x, y)$ wyrażeniami $\min(x, y)$ (nie może zmienić argumentów funkcji) w taki sposób, że po zamianie wyrażenie jest prawdziwe dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d o zerowej sumie. Wyznaczyć wszystkie m, dla których Mikołaj może to zrobić.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że tylko liczby $m \in \{0, 1, 2\}$ spełniają warunki zadania. Zaczniemy od udowodnienia, że dla dowolnych liczb a, b, c, d o sumie równej 0 zachodzi nierówność:

$$\min(a, b) + \min(c, d) + \max(a, c) + \max(a, d) + \max(b, c) + \max(b, d) \geqslant 0\,.$$

Zauważmy, że $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$, wobec czego tezę możemy przepisać jako

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant a + b + c + d - \max(a, b) - \max(c, d) + \max(a, d) + \max(b, c) + \max(b, d) + \max(a, c) = \\ &= -\max(a, b) - \max(c, d) + \max(a, d) + \max(b, c) + \max(b, d) + \max(a, c)\,. \end{aligned}$$

Bez straty ogólności możemy założyć, że $a = \max(a, b, c, d)$. W takim razie

$$\max(a, c) + \max(a, d) - \max(a, b) = a + a - a = a\,.$$

Wystarczy więc wykazać, że

$$a + \max(b, c) + \max(b, d) - \max(c, d) \geqslant 0\,.$$

Jeżeli $\max(b, c, d) = b$, mamy

$$a + \max(b, c) + \max(b, d) - \max(c, d) = a + 2b - \max(c, d) \geqslant a + b \geqslant \frac{a + b + c + d}{2} = 0\,.$$

Jeżeli $\max(b, c, d) = c$, mamy

$$a + \max(b, c) + \max(b, d) - \max(c, d) = a + c - c + \max(b, d) = a + \max(b, d)\,.$$

Zauważmy, że $a + \max(b, d) \geqslant c + \min(b, d)$, zaś

$$a + \max(b, d) + c + \min(b, d) = a + b + c + d = 0\,,$$

wobec czego $a + \max(b, d) \geqslant 0$, co kończy dowód w przypadku $\max(b, c, d) = c$.

Jeżeli $\max(b, c, d) = d$, wystarczy zamienić c i d miejscami i przeprowadzić dowód identyczny do przypadku $\max(b, c, d) = c$. Wykazaliśmy więc, że $m = 2$ spełnia warunki zadania. Oczywiście gdy Mikołaj nie dokona żadnej zmiany lub dokona tylko jedną zmianę, otrzymane wyrażenie nie będzie mniejsze niż w odpowiednim przypadku $m = 2$, więc $m \in \{0,\ 1,\ 2\}$ spełnia warunki zadania.

Pozostaje udowodnić, że jeśli $m \geqslant 3$, to Mikołajowi nie uda się wykonanie tego zadania. Zauważmy, że jeśli spośród wszystkich sześciu wyrażeń wybierzemy co najmniej trzy, to istnieją dwa wyrażenia, które mają wspólną jedną ze zmiennych. Bez straty ogólności załóżmy, że zamieniliśmy wyrażenia $\max(a, b)$ i $\max(a, c)$ na odpowiednie minima. Wtedy dla $a = 3$, $b = c = d = -1$ zmienione wyrażenie jest nie większe niż:

$$(-1) + (-1) + 3 + (-1) + (-1) + (-1) < 0\,.$$

14. Niech $\mathbb{N}$ oznacza zbiór dodatnich liczb całkowitych. Dany jest zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$, który zawiera element różny od 1. Okazało się, że dla dowolnego $n \in A$ oraz dowolnych $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \in A$ liczba

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

także należy do A. Wykazać, że istnieją takie dodatnie liczby całkowite $P,\ Q$, że dowolna liczba całkowita $n > P$ należy do A wtedy i tylko wtedy, gdy $Q|n - P$.

Rozwiązanie:

Sposób I

Najpierw wykażemy, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że jeśli $a \in A$, to $a + n \in A$. Rozważmy istniejące z założeń zadania $b > 1$ należące do A. Wówczas dla dowolnego $a \in A$ mamy $a + b + \ldots + b \in A$ (b występuje w sumie $b - 1$ razy). To pokazuje, że $n = b(b - 1)$ jest szukaną liczbą.

O reszcie $r \bmod n$ powiemy, że jest *dobra*, jeśli istnieje $a \in A$ takie, że $a \equiv r \bmod n$. Zauważmy, że jeśli takie a istnieje, to liczby $a + n, a + 2n, \ldots$ również należą do A. Wykażemy, że zbiór *dobrych* reszt jest postaci $\{x + kd \bmod n\ :\ k = 0, 1, \ldots, n - 1\}$ dla pewnych liczb całkowitych $x,\ d$. Z tego wyniknie nam teza, bowiem wówczas od pewnego miejsca zbiór A pokrywa się ze zbiorem liczb o reszcie $x \bmod \mathrm{NWD}(d, n)$.

Zbiór *dobrych* reszt jest oczywiście niepusty, jeśli jest jednoelementowy, to teza jest trywialna. Rozważmy dwie różne *dobre* reszty $p,\ q$, które minimalizują wartość $p - q \bmod n$. Wówczas, biorąc takie $k, l > 0$, że $kn+p, ln+q \in A$, oraz $m = 0, 1, \ldots, n-1$, mamy $m(kn+p)+(kn+p-m)(ln+q) \in A$, zatem $pq + m(p - q) \bmod n$ jest *dobrą* resztą. Z minimalności $p - q$ wszystkie reszty muszą być tej postaci, zatem dowiedliśmy postulowanego faktu, i co za tym idzie, tezy, przy $x = pq$ i $d = p - q$.

Sposób II

A zawiera co najmniej 2 elementy (jeżeli $1 < p \in A$, to $p < p^2 \in A$). Zauważmy, że zbiór $\{x - y \mid x > y,\ x,\ y \in A\}$ jako podzbiór liczb całkowitych dodatnich ma element najmniejszy, oznaczmy go przez d. Niech $p,\ q \in A$ będą takimi liczbami, że $q - p = d$. Zauważmy, że dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}_+$ zachodzi

$$d \mid p^k - q^k\,.$$

Poprzez indukcję po k wykażemy, że wszystkie liczby postaci

$$p^k,\ p^k + d,\ p^k + 2d,\ \ldots,\ p^k + \frac{p^k - q^k}{d} \cdot d = q^k$$

należą do A.

Baza indukcji ($k = 1$) jest spełniona trywialnie. Załóżmy, że teza indukcji jest spełniona dla pewnego k. W szczególności liczby postaci $p^{k-a}q^a$ dla $a \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ k\}$ należą do A. Istotnie,

$$p^{k-a}q^a - p^k \equiv p^k - p^k \equiv 0 \pmod{p - q}\,.$$

Możemy położyć $p^{k-a}q^a$ oraz $a_i \in \{p,\ q\}$, żeby wykazać, że liczby

$$p^{k+1-a}q^a,\ p^{k+1-a}q^a + d,\ p^{k+1-a}q^a + 2d,\ \ldots, p^{k+1-a}q^a + p^{k-a}q^a d = p^{k-a}q^{a+1}$$

należą do A. Powtarzając to rozumowanie dla $a = 0,\ 1,\ \ldots,\ k$ otrzymujemy tezę indukcji.

Zauważmy teraz, że dla $n_0 > \log_{q/p} p$ przedziały $[p^{n_0},\ q^{n_0}]$ i $[p^{n_0+1},\ q^{n_0+1}$ zawierają element wspólny, tj. $p^{n_0+1} < q^{n_0}$. Niech k będzie największą liczbą całkowitą, taką że $p^{n_0+1} + kd \leqslant q^{n_0}$. Jak już udowodniliśmy, $p^{n_0+1} + kd\ q^{n_0} \in A$, więc z minimalności $d = q - p$ musi zajść $p^{n_0+1} + kd = q^{n_0}$. Oznacza to, że w przedziale $[p^{n_0},\ q^{n_0+1}]$ wszystkie liczby postaci $p^{n_0} + kd$ należą do A. Powtarzając to rozumowanie indukcyjnie dla $n > n_0$, dochodzimy do wniosku, że w przedziale $[p^{n_0},\ \infty)$ wszystkie liczby postaci $p^{n_0} + kd$ należą do A. Z minimalności d wnioskujemy, że żadna inna liczba większa niż p^{n_0} nie należy do A, wobec czego tezę zadania spełniają liczby $P = p^{n_0},\ Q = q - p$.

15. Znaleźć wszystkie wielomiany $f(n)$ o współczynnikach całkowitych spełniające dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ warunki

$$f(n) > 0 \quad \text{oraz} \quad f(n) \mid n^{n-1} - 1\,.$$

Rozwiązanie:

Wykażemy, że jedyne wielomiany spełniające warunki zadania to

$$f(x) = 1,\ f(x) = x - 1,\ f(x) = (x - 1)^2.$$

Załóżmy, że wielomian stale równy $c > 0$ spełnia warunki zadania, wtedy $c = f(2) \mid 2^1 - 1 = 1$, więc $c = 1$. W rozwiązaniu przydatny będzie następujący nietrudny lemat.

Lemat 1. *Niech $P(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych, m liczbą całkowitą dodatnią oraz x, y liczbami całkowitymi. Wtedy jeśli $x \equiv y \pmod{m}$ oraz $m \mid P(x)$ to $m \mid P(y)$.*

Dowód. Ponieważ $m \mid x - y$ oraz $x - y \mid P(x) - P(y)$ to $m \mid P(x) - P(y)$. Stąd i z tego, że $m \mid P(x)$ wynika, że $m \mid P(y)$. □

W dalszej części rozwiązania zakładamy, że $f(n)$ nie jest stały. Wtedy istnieją takie liczby całkowite dodatnie p, n, że p jest liczbą pierwszą oraz $p \mid f(n)$. Niech m będzie rozwiązaniem układu kongruencji $x \equiv 2 \pmod{p - 1}$ oraz $x \equiv n \pmod{p}$. Takowe istnieje na mocy chińskiego twierdzenia o resztach. Wtedy na mocy lematu 1 zachodzi $p \mid f(m)$, stąd $p \mid m^{m-1} - 1$. Zatem

$$0 \equiv m^{m-1} - 1 \equiv m - 1 \pmod{p},$$

przy czym ostatnie przystawanie wynika z małego twierdzenia Fermata. Wobec tego $n \equiv m \equiv 1 \pmod p$, stąd na mocy lematu 1 zachodzi $p \mid f(1)$.

Zatem dla każdej liczby pierwszej p, dla której istnieje takie n, że $p \mid f(n)$ zachodzi $p \mid f(1)$. Na mocy poniżej udowodnionego lematu otrzymamy $f(1) = 0$.

Lemat 2. *Dany jest niestały wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych. Wówczas istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p takich, że $p \mid P(n)$ dla pewnej liczby całkowitej $n \geqslant 2$.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że $p_1, \ldots, p_k$ to wszystkie takie liczby pierwsze. Ponieważ $P(x)$ jest niestały, to istnieje N takie, że $0 \neq P(N) = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Niech $C = N + m \cdot p_1^{\alpha_1+1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k+1}$ dla pewnej takiej liczby całkowitej m, że $C \geqslant 2$. Wykażemy, że liczba postaci $P(C)$ musi być równa z dokładnością do znaku liczbie $P(N)$. Zauważmy, że na mocy lematu 1 zachodzi $p_i^{\alpha_i} \mid P(C)$ dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Podobnie, gdyby $p_i^{\alpha_i+1} \mid P(C)$ to $p_i^{\alpha_i+1} \mid P(N)$, zatem $p_i^{\alpha_i+1} \nmid P(C)$. Wobec tego dla każdej liczby całkowitej m liczba $P(N + m \cdot p_1^{\alpha_1+1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k+1}) = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, co jest sprzeczne z niestałością wielomianu $P(x)$. □

Niech $f(n) = (n-1)^k \cdot g(n)$, gdzie $g(1) \neq 0$. Wtedy wielomian $g(n)$ również spełnia warunki zadania, więc musi być stale równy 1. Pozostaje rozważyć wszystkie wielomiany postaci $f(n) = (n-1)^k$ dla liczb całkowitych dodatnich k. Ponieważ $(4-1)^k \mid 4^3 - 1$, to wystarczy się ograniczyć do rozważania przypadku $k \leqslant 2$. Dla $k = 1$ w oczywisty sposób taki wielomian spełnia warunki zadania, dla $k = 2$ mamy

$$\frac{n^{n-1} - 1}{n-1} = 1 + n + \cdots + n^{n-2} \equiv (n-1) \cdot 1 \equiv 0 \pmod{n-1},$$

więc warunki zadania są również spełnione dla wielomianu $f(n) = (n-1)^2$.

16. Dany jest trójkąt równoramienny ABC wpisany w okrąg ω, w którym $AC = BC$. Punkt M jest środkiem odcinka AB. Prosta styczna do okręgu o średnicy CM przechodząca przez B, różna od prostej BC, przecina okrąg ω po raz drugi w punkcie D. Wykazać, że istnieje okrąg styczny do prostych DC, CA, AB oraz okręgu ω.

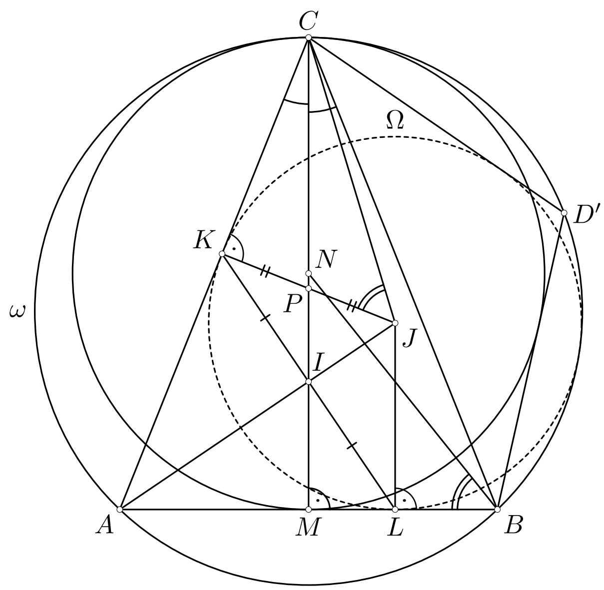
Rozwiązanie:

Oznaczmy przez Ω okrąg styczny do odcinków AC, AB oraz okręgu ω. Niech D' będzie drugim punktem przecięcia prostej stycznej do Ω i przechodzącej przez C z okręgiem ω. Wystarczy udowodnić, że $D' = D$. W tym celu wykażemy, że $\sphericalangle ABD + \sphericalangle ACD' = 180^\circ$, wtedy otrzymamy, że proste CD' oraz BD przecinają się na okręgu ω, co pociągnie za sobą równość $D' = D$.

Niech J będzie środkiem okręgu Ω, K i L rzutami J na AC i AB, zaś N środkiem odcinka MC. Wtedy $\sphericalangle ACD' = 2\sphericalangle KCJ = 180 - 2\sphericalangle CJK$ oraz $\sphericalangle ABD = 2\sphericalangle MBN$, więc wystarczy wykazać równość $\sphericalangle MBN = \sphericalangle CJK$ (lub równoważną równość $\sphericalangle ACJ = \sphericalangle MNB$). Dalszą część rozwiązania można przeprowadzić na kilka sposobów.

Sposób I

Oznaczmy środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC przez I. Ze znanego lematu, który sformułujemy i udowodnimy poniżej, wynika że I jest środkiem odcinka KL. Punkt I leży także na odcinku CM, gdyż trójkąt ABC jest równoramienny, a także leży na prostej AJ, gdyż jest to dwusieczna kąta BAC.

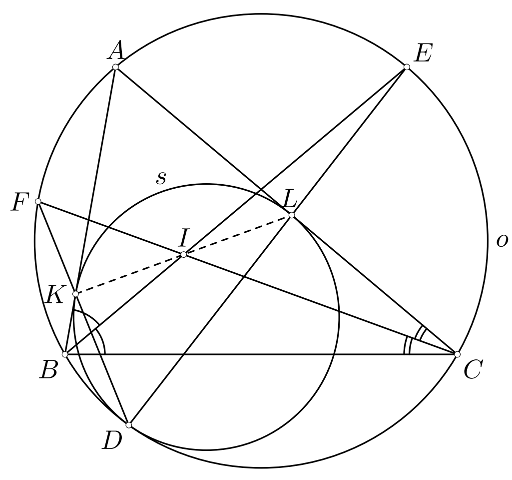


Oznaczmy przecięcie prostych JK i CM przez P. Proste IM i JL są równoległe (bo obie są prostopadłe do AB), zatem na mocy twierdzenia Talesa mamy $\frac{KI}{IL} = \frac{KP}{PJ}$, skoro zaś $KI = IL$, to $KP = PJ$.

Trójkąty prostokątne CKP i CMB są podobne, gdyż $\sphericalangle KCP = \sphericalangle MCB$. Wobec tego $\frac{CK}{KP} = \frac{CM}{MB}$. Ponieważ $KJ = 2KP$ oraz $NM = \frac{1}{2}CM$, otrzymana równość stosunków daje $\frac{CK}{KJ} = \frac{NM}{MB}$. Wynika stąd, że trójkąty prostokątne CKJ i NMB są podobne (cecha bkb), a zatem $\sphericalangle MBN = \sphericalangle CJK$, co było do udowodnienia.

Sformułujemy teraz i udowodnimy lemat, z którego skorzystaliśmy na początku rozwiązania.

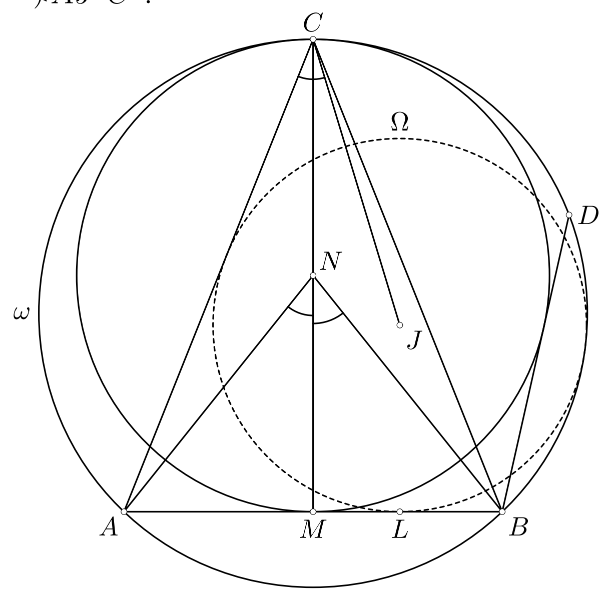
Lemat. *Dany jest trójkąt ABC. Okrąg styczny do okręgu opisanego na trójkącie ABC jest również styczny do boku AB w punkcie K oraz do boku AC w punkcie L. Wówczas środek odcinka KL jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC.*



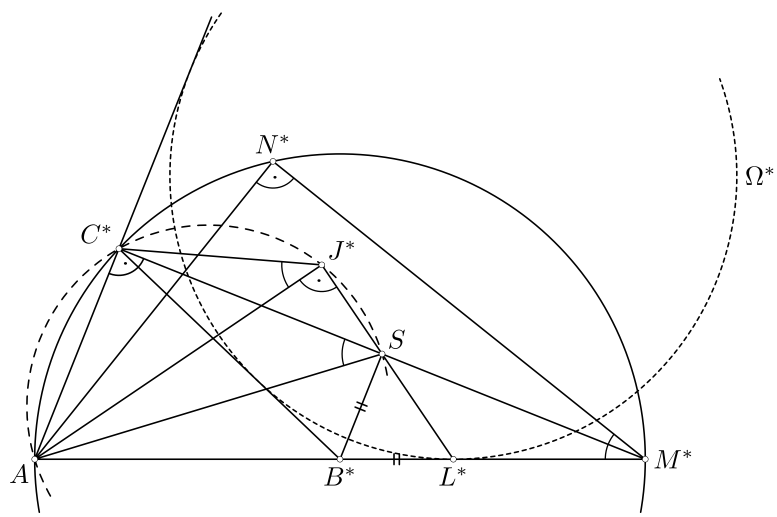
Dowód. Oznaczmy przez o okrąg opisany na trójkącie ABC, przez s okrąg styczny do o oraz odcinków AB i AC, przez D punkt styczności okręgów o i s, a przez F i E punkty przecięcia okręgu opisanego na trójkącie ABC z prostymi odpowiednio DK i DL. Jednokładność o środku w D przekształcająca s na o przeprowadza K na F, stąd prosta styczna do o w F jest równoległa do AB. Zatem F jest środkiem łuku AB okręgu o. Analogicznie dowodzimy, że E jest środkiem łuku AC. Z twierdzenia Pascala dla sześciokąta $ABEDFC$ wpisanego w okrąg wynika, że przecięcia prostych AB i DF, AC i DE oraz BE i CF leżą na jednej prostej. Stąd I leży na prostej KL. Ponieważ trójkąt AKL jest równoramienny i AI jest dwusieczną kąta KAL, to I musi być środkiem KL. □

Sposób II

Z symetrii $\sphericalangle ANM = \sphericalangle BNM$, więc wystarczy wykazać, że $\sphericalangle ACJ = \sphericalangle ANM$. Rozważmy inwersję o środku w A. Przez X^* będziemy oznaczać obraz X przy tej inwersji. Tezę do udowodnienia przepisujemy równoważnie jako $\sphericalangle AM^*N^* = \sphericalangle AJ^*C^*$.



Zauważmy, że A, M^*, N^*, C^* leżą na jednym okręgu i jeśli oznaczymy przez S środek odcinka C^*M^*, to ponieważ trójkąty ACM i AM^*C^* są podobne, to również ANM i ASC^* są podobne. Stąd $\sphericalangle AM^*N^* = \sphericalangle ANM = \sphericalangle ASC^*$. Sprowadziliśmy tezę do udowodnienia, że punkty A, S, J^*, C^* leżą na jednym okręgu.



Zachodzi $\sphericalangle SC^*A = \sphericalangle M^*C^*A = \sphericalangle AMC = 90°$. Musimy zatem wykazać, że $\sphericalangle SJ^*A = 90°$. Ponieważ $\sphericalangle AJ^*L^* = \sphericalangle ALJ = 90°$, to wystarczy udowodnić, że $L^*S \perp AJ^*$.

Obrazem okręgu ω w inwersji jest prosta B^*C^*, stąd Ω^* jest okręgiem dopisanym do trójkąta AB^*C^*. Stąd $AL^* = \frac{1}{2}(AB^* + AC^* + B^*C^*) = AB^* + \frac{1}{2}AC^*$, więc $B^*L^* = \frac{1}{2}AC^* = B^*S$. Zatem L^*S jest prostopadła do dwusiecznej kąta L^*B^*S, która jest równoległa do dwusiecznej kąta B^*AC^*, czyli prostej AJ^*. To kończy dowód.

17. Dane są względnie pierwsze liczby nieparzyste p i q. Udowodnić, że zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^{pq-1} (-1)^{\left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{q} \right\rfloor} = 1.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy dowolną liczbę k ze zbioru $\{0, 1, \ldots, pq-1\}$ i przedstawmy ją w postaci $k = ap+b = cq+d$, gdzie a, b, c, d są nieujemnymi liczbami całkowitymi oraz $b < p$ i $d < q$. Wówczas $2k = ap + cq + b + d$. Zauważmy, że

$$b + d \equiv -ap - cq \equiv -a - c \equiv a + c \pmod 2,$$

czyli liczby $a + c$ oraz $b + d$ są tej samej parzystości, a co za tym idzie

$$(-1)^{\left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{q} \right\rfloor} = (-1)^{a+c} = (-1)^{b+d}.$$

Z chińskiego twierdzenia o resztach wynika, że przypisanie $k \mapsto (b, d)$ jest bijekcją pomiędzy zbiorami $\{0, 1, \ldots, pq - 1\}$ i $\{0, 1, \ldots, p - 1\} \times \{0, 1, \ldots, q - 1\}$. To oznacza, że suma z treści zadania jest równa

$$\sum_{b=0}^{p-1} \sum_{d=0}^{q-1} (-1)^{b+d} = \left(\sum_{b=0}^{p-1} (-1)^b \right) \left(\sum_{d=0}^{q-1} (-1)^d \right) = 1 \cdot 1 = 1.$$

18. Dana jest dodatnia liczba całkowita n, graf G o wierzchołkach $v_1, \ldots,\ v_n$ oraz n nieujemnych liczb całkowitych $a_1, \ldots,\ a_n$. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:

a) istnieje taka orientacja krawędzi G, że dla każdego $i = 1, \ldots,\ n$ do wierzchołka v_i wchodzi co najwyżej a_i krawędzi,

b) dla każdego niepustego podzbioru X zbioru $\{1,\ \ldots,\ n\}$, liczba krawędzi pomiędzy wierzchołkami ze zbioru $\{v_i\ :\ i \in X\}$ jest nie większa niż suma liczb ze zbioru $\{a_i\ :\ i \in X\}$.

Rozwiązanie:

Najpierw wykażemy, że b) wynika z a). Zauważmy, że dla dowolnego niepustego zbioru wierzchołków S, każda krawędź pomiędzy dwoma wierzchołkami z S po zorientowaniu wchodzi do pewnego wierzchołka z S. Zatem liczbę krawędzi pomiędzy wierzchołkami z S można oszacować z góry przez liczbę wszystkich krawędzi w G, które po zorientowaniu wchodzą do pewnego wierzchołka z S. Z warunku a) wynika, że jest ich co najwyżej

$$\sum_{v_i \in S} a_i,$$

co dowodzi implikacji z a) do b).

Następnie udowodnimy, że b) implikuje a).

Sposób I

Rozważmy graf G', powstały przez orientację krawędzi G, który minimalizuje wyrażenie

$$M(G') = \sum_{i=1}^{n} \max(0,\ d^-(v_i) - a_i),$$

gdzie przez $d^-_{G'}(v)$ oznaczamy liczbę krawędzi wchodzących do wierzchołka v w grafie G'. Załóżmy wbrew tezie, że przy takiej orientacji to wyrażenie jest dodatnie. Wtedy musi istnieć takie k, że do wierzchołka v_k w G' wchodzi więcej niż a_k krawędzi.

Niech X będzie zbiorem indeksów wszystkich wierzchołków, z których istnieje ścieżka do v_k w G'. Z warunku b) dla zbioru X oraz tego, że $d^-_{G'}(v_k) - a_k > 0$ otrzymujemy, że istnieje takie $j \in X$, że do v_j wchodzi mniej niż a_j krawędzi z wierzchołków należących do X. Jednakże wszystkie wierzchołki w G', z których istnieje krawędź wchodząca do v_j, z definicji zbioru X muszą należeć do X, stąd $d^-_{G'}(v_j) - a_j < 0$.

Rozważmy graf G'' powstały z grafu G', poprzez odwrócenie wszystkich krawędzi na pewnej ścieżce z v_j do v_k w G'. Zauważmy, że tylko wierzchołki v_k oraz v_j mają różne stopnie wchodzące w G'i G'' oraz zachodzi

$$\max(0, d^-_{G'}(v_k) - a_k) = d^-_{G'}(v_k) - a_k > d^-_{G''}(v_k) - a_k = \max(0, d^-_{G''}(v_k) - a_k),$$
$$\max(0, d^-_{G'}(v_j) - a_j) = 0 = \max(0, d^-_{G''}(v_j) - a_j).$$

Stąd $M(G') > M(G'')$, czyli uzyskujemy sprzeczność z wyborem G', co kończy dowód drugiej implikacji.

Sposób II

Niech E będzie zbiorem krawędzi G, zaś V niech będzie zbiorem, w którym znajduje się po a_i kopii każdego wierzchołka v_i dla $i = 1, \ldots, n$. Rozważmy graf dwudzielny między zbiorami E i V, w którym krawędź między $e \in E$ oraz $v \in V$ występuje wtedy i tylko wtedy, gdy jednym z końców e w grafie G jest kopia wierzchołka v.

Wtedy warunek a) oznacza, że każdej krawędzi możemy przyporządkować jedną z kopii któregoś z jej końców i będzie to przyporządkowanie różnowartościowe. Innymi słowy, oznacza to, że istnieje skojarzenie z E do V. Z twierdzenia Halla jest to równoważne temu, że dla każdego podzbioru krawędzi $E' \subseteq E$ grafu G, jeżeli dla $X \subseteq \{1, \ldots, n\}$ zbiór $\{v_i \colon i \in X\}$ jest zbiorem końców krawędzi z E', to suma liczb ze zbioru $\{a_i \colon i \in X\}$ jest równa co najmniej $|E'|$. To zaś wynika bezpośrednio z warunku b), bo E' jest podzbiorem krawędzi pomiędzy wierzchołkami ze zbioru $\{v_i \colon i \in X\}$.

19. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB < AC$. Okrąg ω jest styczny do prostej AB w punkcie B oraz do odcinka AC w punkcie D. Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą BC. Okrąg ω przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w różnych punktach B i P. Udowodnić, że $\sphericalangle CPE = 2\sphericalangle ACB$.

Rozwiązanie:

Sposób I

Rozważmy inwersję w punkcie B. Niech X^* oznacza obraz X po tej inwersji. Poczyńmy kilka oznaczeń i obserwacji. Niech Ω będzie okręgiem opisanym na trójkącie A^*BD^*. Zauważmy, że $A^*D^* = D^*B$. Punkt C^* leży na krótszym łuku BD^* okręgu Ω. Prosta l, prostopadła do BD^* i przechodząca przez punkt D^*, przecina prostą BC^* w punkcie E^*. Punkt P^* leży na prostej stycznej do Ω w punkcie D^* oraz na prostej A^*C^*. Kąt ACB jest równy kątowi C^*A^*B, zaś kąt CPE jest równy

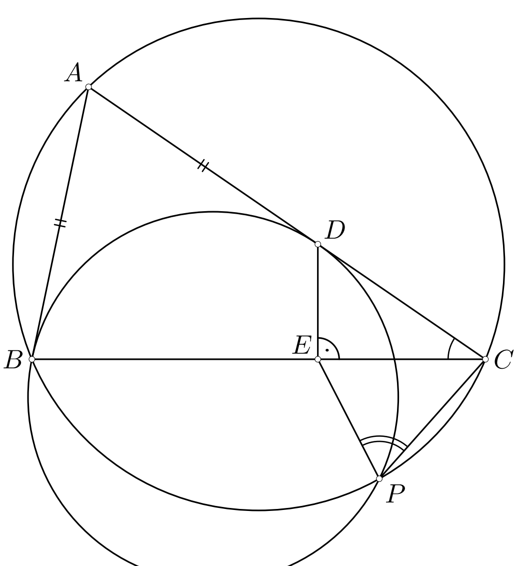
$$\sphericalangle BPC - \sphericalangle BPE = \sphericalangle BC^*P^* - \sphericalangle BE^*P^*.$$

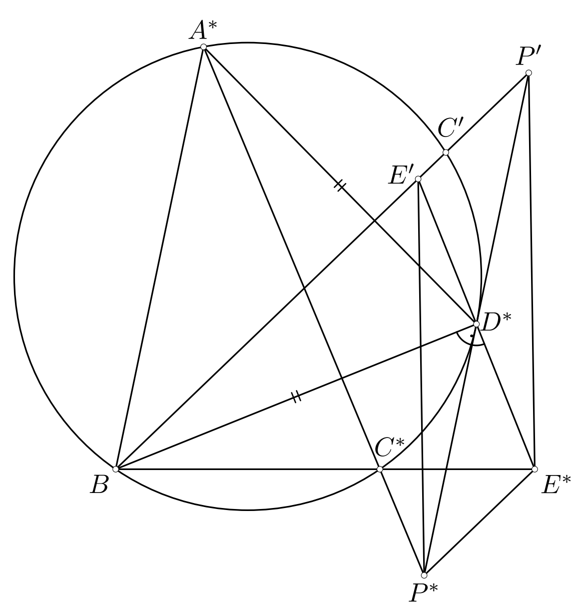
Czyli aby wykazać tezę zadania, równoważnie można udowodnić równość

$$\sphericalangle BC^*P^* - \sphericalangle BE^*P^* = 2\sphericalangle C^*A^*B$$

lub

$$\sphericalangle BE^*P^* = \sphericalangle C^*B^*A - \sphericalangle C^*A^*B.$$





Niech C' będzie takim punktem, że czworokąt A^*BC^*C' jest trapezem równoramiennym. Oznaczmy punkt przecięcia prostej BC' z prostymi D^*P^* oraz l przez odpowiednio P' i E'. Z symetrii względem symetralnej odcinka A^*B wynika, że $P^*D^* = D^*P'$. Ponadto D^* jest środkiem łuku C^*C' okręgu Ω, czyli w trójkącie BE^*E' prosta BD^* jest dwusieczną prostopadłą do przeciwległego boku. Wnioskujemy stąd, że jest to trójkąt równoramienny i $E^*D^* = D^*E'$. To w połączeniu z uzyskaną wcześniej równością $P^*D^* = D^*P'$ oznacza, że czworokąt $P^*E^*P'E'$ jest równoległobokiem, a w szczególności $P^*E^* \parallel P'E'$. Widzimy, że

$$\sphericalangle BE^*P^* = \sphericalangle E^*BC' = \sphericalangle C^*BA^* - \sphericalangle C'BA^* = \sphericalangle C^*BA^* - \sphericalangle C^*A^*B,$$

co należało wykazać.

Sposób II

Niech okrąg ω przecina odcinek BC w punkcie $X \neq B$. Zauważmy, że

$$\sphericalangle XPC = \sphericalangle BPC - \sphericalangle BPX = 180^\circ - \sphericalangle BAC - \sphericalangle ABC = \sphericalangle DCX,$$

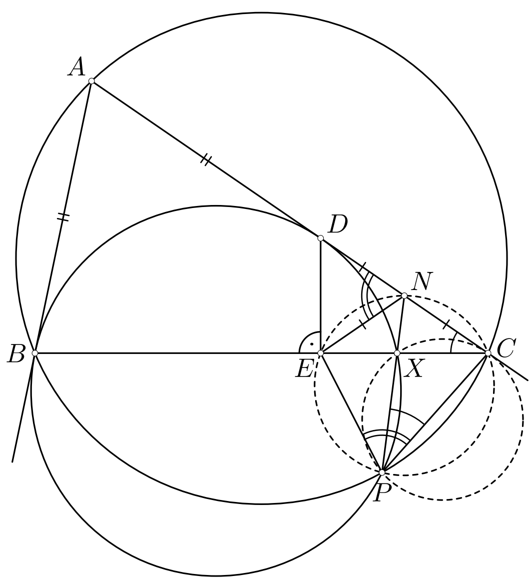
stąd okrąg XPC jest styczny do prostej AC. Ponieważ prosta PX jest osią potęgową ω i okręgu opisanego na XPC, to musi przechodzić przez środek odcinka AC, oznaczmy go przez N. Wtedy $NC = NE = ND$ oraz

$$\sphericalangle NPC = \sphericalangle NCE = \sphericalangle NEC,$$

więc N, E, C, P leżą na jednym okręgu. W takim razie

$$\sphericalangle CPE = \sphericalangle DNE = 2\sphericalangle ACB,$$

co kończy dowód.



20. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą i niech $(p_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ będzie ciągiem n^2 liczb rzeczywistych. Udowodnić, że zachodzi nierówność

$$n^2 \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} p_{i,j}^2 \leqslant \sum_{1\leqslant a,b\leqslant n} \left(\sum_{k=1}^{n} \left| \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ n|ai+bj-k}} p_{i,j} \right| \right)^2$$

Rozwiązanie:

Niech ω będzie pierwiastkiem pierwotnym z jedynki stopnia n. Wtedy

$$\sum_{1\leqslant a,b\leqslant n}\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\omega^{ai+bj}p_{i,j}\right|^2=\sum_{1\leqslant a,b\leqslant n}\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\omega^{ai+bj}p_{i,j}\right)\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\omega^{-(ai+bj)}p_{i,j}\right)$$
$$=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\sum_{1\leqslant i',j'\leqslant n}p_{i,j}p_{i',j'}\sum_{a=1}^{n}\omega^{a(i-i')}\sum_{b=1}^{n}\omega^{b(j-j')}.$$

Zauważmy, że dla dowolnej liczby całkowitej m zachodzi

$$\omega^m\sum_{k=1}^{n}(\omega^m)^k=\omega^{2m}+\omega^{3m}+\ldots+\omega^{nm}+\omega^{nm+m}=\omega^m+\omega^{2m}+\omega^{3m}+\ldots+\omega^{nm}=\sum_{k=1}^{n}(\omega^m)^k.$$

Z tego widzimy, że

$$\sum_{k=1}^{n}(\omega^m)^k=\begin{cases}n & n\mid m\\ 0 & n\nmid m,\end{cases}$$

stąd

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\sum_{1\leqslant i',j'\leqslant n}p_{i,j}p_{i',j'}\sum_{a=1}^{n}\omega^{a(i-i')}\sum_{b=1}^{n}\omega^{b(j-j')}=n^2\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}p_{i,j}^2.$$

Ponadto

$$\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\omega^{ai+bj}p_{i,j}\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\omega^k\cdot\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ n\mid ai+bj-k}}p_{i,j}\right)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ n\mid ai+bj-k}}p_{i,j}\right|.$$

Łącząc powyższe dostajemy tezę zadania.

Uwaga: przestawimy inny sposób rozwiązania, ale przy dodatkowym założeniu, że n jest liczbą pierwszą.

Zauważmy, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1,x_2,\ldots,x_n$ zachodzą nierówności

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)^2=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|x_ix_j|\geqslant\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|x_ix_j|=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$$

oraz

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)^2=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|x_ix_j|\geqslant\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|x_ix_j|=2\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2.$$

Dla ustalonych a,b, oznaczmy

$$x_k:=\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ n\mid ai+bj-k}}p_{i,j},$$

$$S:=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}p_{i,j}.$$

Korzystając z wyżej udowodnionych nierówności otrzymujemy, że

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ n|ai+bj-k}} p_{i,j}\right|\right)^2 \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ n|ai+bj-k}} p_{i,j}\right)^2 = S^2$$

oraz

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ n|ai+bj-k}} p_{i,j}\right|\right)^2 &\geqslant 2\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ n|ai+bj-k}} p_{i,j}\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ n|ai+bj-k}} p_{i,j}\right)^2\\ &= 2\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ n|ai+bj-k}} p_{i,j}\right)^2 - S^2.\end{aligned}$$

Sumując otrzymane nierówności po wszystkich $1 \leqslant a, b \leqslant n$ otrzymujemy

$$\sum_{1\leqslant a,b\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ n|ai+bj-k}} p_{i,j}\right|\right)^2 \geqslant n^2S^2 \tag{1}$$

oraz

$$\sum_{1\leqslant a,b\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ n|ai+bj-k}} p_{i,j}\right|\right)^2 \geqslant 2\sum_{1\leqslant a,b\leqslant n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ n|ai+bj-k}} p_{i,j}\right)^2 - n^2S^2. \tag{2}$$

Rozważmy wyrażenie

$$\sum_{1\leqslant a,b\leqslant n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ n|ai+bj-k}} p_{i,j}\right)^2.$$

Dla dowolnych $1 \leqslant i, j, i', j' \leqslant n$, liczba stojąca przy $p_{i,j}p_{i',j'}$ w tym wyrażeniu jest równa liczbie takich trójek $1 \leqslant a, b, k \leqslant n$, że

$$n \mid ai + bj - k \quad \text{oraz} \quad n \mid ai' + bj' - k.$$

Zauważmy, że takich trójek liczb jest tyle samo, co par $1 \leqslant a, b \leqslant n$, dla których

$$n \mid a(i - i') + b(j - j'), \tag{3}$$

gdyż dla pary a, b spełniającej powyższą podzielność k jest wyznaczone jednoznacznie.

Oznaczmy $\Delta i = i - i'$, $\Delta j = j - j'$. Jeżeli $\Delta i = \Delta j = 0$, to każda para a, b spełnia (3), czyli jest ich dokładnie n^2. Dalej załóżmy, że przynajmniej jedna z liczb Δi, Δj nie jest zerem, udowodnimy że wtedy takich par a, b spełniających (3) jest dokładnie n. W tym miejscu rozwiązania wykorzystamy założenie, że n jest liczbą pierwszą. Bez straty ogólności załóżmy, że $\Delta i \neq 0$. Ponieważ n jest liczbą pierwszą, to istnieje dokładnie jedna dodatnia liczba całkowita mniejsza od n, która pomnożona przez Δi daje resztę 1 modulo n, oznaczmy ją przez $(\Delta i)^{-1}$. Liczby $1 \leqslant a, b \leqslant n$ spełniają (3) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a \equiv -(\Delta i)^{-1} b\Delta j \pmod{n},$$

stąd dla każdego b istnieje dokładnie jedno a, dla którego zachodzi (3). Czyli

$$\sum_{1\leqslant a,b\leqslant n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ n|ai+bj-k}} p_{i,j}\right)^2 = (n^2-n)\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} p_{i,j}^2 + nS^2.$$

Wstawiając powyższą równość do (2) otrzymujemy oszacowanie

$$\sum_{1\leqslant a,b\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ n|ai+bj-k}} p_{i,j}\right|\right)^2 \geqslant 2(n^2-n)\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} p_{i,j}^2 + (2n-n^2)S^2. \tag{4}$$

Mnożąc (1) przez $1-\frac{2}{n}$ i dodając do (4) dostajemy

$$\left(2-\frac{2}{n}\right)\sum_{1\leqslant a,b\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ n|ai+bj-k}} p_{i,j}\right|\right)^2 \geqslant 2(n^2-n)\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} p_{i,j}^2.$$

Mnożąc obustronnie przez $\frac{n}{2(n-1)}$ otrzymujemy

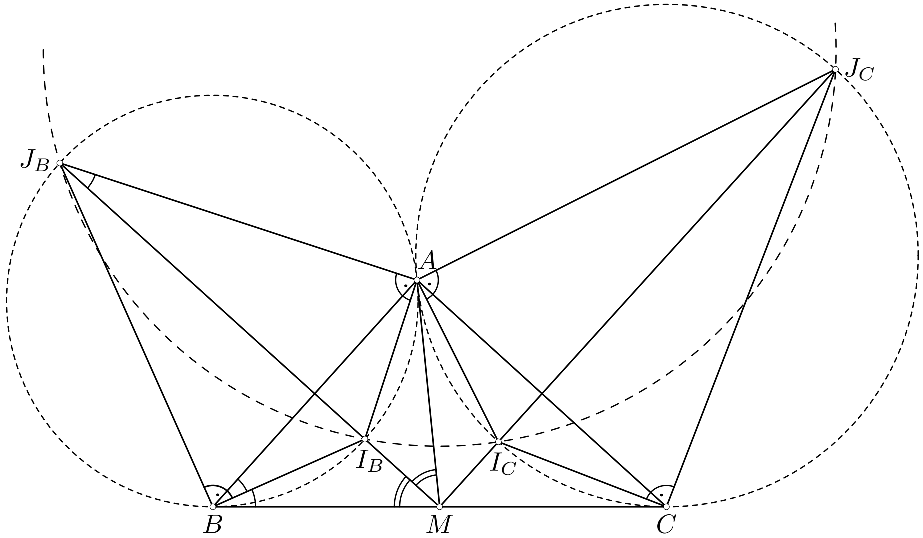
$$\sum_{1\leqslant a,b\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ n|ai+bj-k}} p_{i,j}\right|\right)^2 \geqslant n^2\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} p_{i,j}^2,$$

co kończy dowód.

21. Dany jest trójkąt ABC, w którym M jest środkiem boku BC. Udowodnić, że środki okręgów wpisanych w trójkąty ABM i ACM oraz środki okręgów dopisanych do nich, stycznych odpowiednio do boków AB i AC leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:

Niech I_B, J_B będą środkami okręgów odpowiednio wpisanego i dopisanego do boku AB w trójkącie ABM. Punkty A, I_B, B, J_B leżą na okręgu o średnicy I_BJ_B. To oznacza, że $\sphericalangle AJ_BM = \sphericalangle ABI_B = \sphericalangle I_BBM$. Oczywiście również $\sphericalangle AMJ_B = \sphericalangle I_BMB$. To oznacza, że trójkąty MAJ_B oraz MI_BB są podobne. Możemy zapisać $\frac{MA}{MJ_B} = \frac{MI_B}{MB}$, czyli też $MI_B \cdot MJ_B = MA \cdot MB$. Analogicznie oznaczając pozostałe środki przez I_C, J_C dostaniemy $MA \cdot MC = MI_C \cdot MJ_C$. Łącząc ostatnie dwie równości i korzystając z twierdzenia o potędze punktu względem okręgu dostajemy tezę zadania.



22. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, dla których liczba $P(P(n)+n)$ jest pierwsza dla nieskończenie wielu liczb całkowitych n.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że jedyne wielomiany spełniające warunki zadania to

$$P(x) = p \text{ dla dowolnej liczby pierwszej } p, \quad P(x) = -2x + l \text{ dla dowolnej liczby nieparzystej } l.$$

W rozwiązaniu wykorzystamy dwa znane fakty o wielomianach.

Fakt 1. *Dla dowolnego wielomianu $P(x)$ o współczynnikach całkowitych i dowolnych dwóch różnych liczb całkowitych a, b zachodzi podzielność*

$$a - b \mid P(a) - P(b).$$

Fakt 2. *Dla dowolnych dwóch wielomianów $F(x)$ i $G(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, jeżeli dla nieskończenie wielu x zachodzi $F(x) = \pm G(x)$, to albo $F(x) = G(x)$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x albo $F(x) = -G(x)$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x.*

Dowód. Jeżeli dla nieskończenie wielu x zachodzi $F(x) = \pm G(x)$, to albo dla nieskończenie wielu x zachodzi $F(x) - G(x) = 0$, albo dla nieskończenie wielu x zachodzi $F(x) + G(x) = 0$. W obu przypadkach po lewej stronie równania uzyskujemy wielomiany mające nieskończenie wiele pierwiastków. Z twierdzenia Bezout wynika, że w takim razie muszą być stale równe zero. □

Załóżmy, że wielomian $P(x)$ spełnia warunki zadania. Niech S będzie zbiorem tych liczb całkowitych n, dla których $P(P(n) + n)$ jest liczbą pierwszą. Z założenia o $P(x)$ zbiór S jest nieskończony.

Rozważmy liczbę całkowitą $n \in S$. Zauważmy, że gdyby $P(n) = 0$, to $P(P(n) + n) = P(n) = 0$, co byłoby sprzeczne z $n \in S$. W takim razie korzystając z faktu 1 dla $a := P(n) + n$, $b := n$ widzimy, że

$$P(n) \mid P(P(n) + n).$$

Gdyby dla nieskończenie wielu n zachodziło $P(n) = \pm 1$, to z faktu 2 wielomian $P(x)$ musiałby być stale równy 1 lub stale równy -1, a wtedy zbiór S byłby pusty i uzyskalibyśmy sprzeczność. W takim razie, dla nieskończenie wielu $n \in S$ zachodzi

$$P(n) = \pm P(P(n) + n).$$

Ponownie korzystając z faktu 2 widzimy, że $P(x) = P(P(x)+x)$ dla wszystkich x lub $P(x) = -P(P(x)+x)$ dla wszystkich x. Porównując stopnie po obu stronach równań widzimy, że musi być $\deg P(x) \leqslant 1$.

Pozostaje sprawdzić, które wielomiany postaci $P(x) = kx + l$ dla pewnych liczb całkowitych k, l, spełniają warunki z treści zadania. Zauważmy, że wtedy dla dowolnej liczby całkowitej n zachodzi

$$P(P(n) + n) = P(kn + l + n) = (k + 1)(kn + l).$$

Jeżeli $k + 1 \notin \{-1, 1\}$, to tylko dla skończenie wielu n liczba $(k + 1)(kn + l)$ może być pierwsza. Jeżeli $k = 0$, to l musi być liczbą pierwszą i każdy wielomian $P(x)$ stale równy p dla pewnej liczby pierwszej p spełnia warunki zadania. Jeżeli $k = -2$, to

$$P(P(n) + n) = 2n - l.$$

Jeżeli l jest parzyste, to powyższe wyrażenie jest zawsze parzyste, więc nie może być liczbą pierwszą dla nieskończenie wielu n. Jeżeli l jest nieparzyste, to zbiór

$$\{P(P(n) + n) \colon n \in \mathbb{Z}\}$$

zawiera wszystkie liczby nieparzyste, więc w szczególności wszystkie nieparzyste liczby pierwsze i warunek z zadania jest spełniony.

23. Znaleźć wszystkie funkcje $f(x)$ określone na zbiorze dodatnich liczb całkowitych i przyjmujące wartości będące liczbami rzeczywistymi, spełniające dla dowolnej trójki dodatnich liczb całkowitych a, b, c nierówność

$$f(ac) + f(bc) - f(c)f(ab) \geqslant 1.$$

Rozwiązanie:

Na początek ustalmy pewną całkowitą liczbę $n \geqslant 1$ i zdefiniujmy funkcję g określoną na zbiorze nieujemnych liczb całkowitych jako $g(k) = f(n^k)$. Wtedy nasza nierówność dla dowolnych nieujemnych liczb całkowitych a, b, c przyjmuje postać

$$g(a+c) + g(b+c) - g(c)g(a+b) = f(n^a \cdot n^c) + f(n^b \cdot n^c) - f(n^c)f(n^a \cdot n^b) \geqslant 1.$$

Dla $a = b = c = 0$ otrzymujemy

$$2g(0) - g(0)^2 \geqslant 1,$$

czyli $0 \geqslant g(0)^2 - 2g(0) + 1 = (g(0) - 1)^2$, więc $g(0) = 1$.

Dla dowolnego całkowitego $x \geqslant 0$, po podstawieniu $a = 0$, $b = c = x$ oraz $a = b = x$, $c = 0$ otrzymujemy odpowiednio

$$g(x) + g(2x) - g(x)^2 \geqslant 1 \text{ oraz } 2g(x) - g(2x) \geqslant 1,$$

co po zsumowaniu stronami daje $3g(x) - g(x)^2 \geqslant 2$, czyli $0 \geqslant g(x)^2 - 3g(x) + 2 = (g(x) - 1)(g(x) - 2)$, więc

$$g(x) \in [1, 2].$$

Następnie będziemy korzystać z podstawienia $a = b = c$, dla którego mamy $1 \leqslant 2g(2a) - g(a)g(2a)$, czyli

$$1 \leqslant g(2a)(2 - g(a)).$$

Wykażemy indukcyjnie, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej t i dla nieujemnej liczby całkowitej $x \geqslant 0$ zachodzi $g(x) < 1 + \frac{1}{t}$. Dla $t = 1$, skoro $1 \leqslant g(2x)(2 - g(x))$, to $g(x) \neq 2$, więc $g(x) < 2$. Dalej załóżmy, że dla pewnego t i każdej liczby całkowitej $x \geqslant 0$ zachodzi $g(x) < 1 + \frac{1}{t}$. Zachodzi $2 - g(x) > 0$, więc z nierówności $g(2x)(2 - g(x)) \geqslant 1$ otrzymujemy

$$\frac{1}{2 - g(x)} \leqslant g(2x) < 1 + \frac{1}{t}$$

Z tego wynika, że

$$2 - g(x) > \frac{1}{1 + \frac{1}{t}} = \frac{t}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1},$$

więc $g(x) < 1 + \frac{1}{t+1}$, co kończy dowód kroku indukcyjnego.

Ponieważ nierówność $g(x) < 1 + \frac{1}{t}$ zachodzi dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych t, to $g(x) \leqslant 1$ dla każdego całkowitego $x \geqslant 0$, co w połączeniu z poprzednim wnioskiem daje nam $g(x) = 1$. Skoro $g(x) = f(n^x) = 1$ i n było dowolną dodatnią liczbą całkowitą, to otrzymujemy, że $f(n) = 1$ dla każdego n. Oczywiście ta funkcja spełnia założenia zadania.

24. Na pewnym obozie matematycznym rozdzielono n uczniów do k pokojów. Okazało się, że dla każdych dwóch pokojów istnieją uczeń z pierwszego pokoju i uczeń z drugiego pokoju, którzy się nie znają. Udowodnić, że można tak rozmieścić uczniów w $n-k+1$ pokojach, żeby nikt nie znał swoich współlokatorów.

Rozwiązanie:

Zadanie można wyrazić w języku teorii grafów. Podzbiór wierzchołku grafu nazwiemy *niezależnym*, jeżeli każde dwa wierzchołki tego podzbioru nie są połączone krawędzią. Dany jest graf G, którego zbiór wierzchołków V można przedstawić jako sumę k parami rozłącznych zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_k$, przy czym dla każdej pary $1 \leqslant i < j \leqslant k$ istnieją takie wierzchołki $v_i \in A_i$ oraz $v_j \in V_j$, że v_i oraz v_j nie są połączone krawędzią. Trzeba wykazać, że można podzielić V na $n-k+1$ zbiorów niezależnych $B_1, B_2, \ldots, B_{n-k+1}$.

Sposób I

Dla $k=1$ teza jest oczywista. Wykażemy, że prawdziwość tezy dla $k \geqslant 1$ implikuje jej prawdziwość dla $k+1$.

Załóżmy, że $|A_1|+|A_2|+\ldots+|A_k| = n'$. Wtedy na mocy tezy indukcyjnej zbiór $V_k = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ można podzielić na $n'-k+1$ zbiorów niezależnych $B_1, B_2, \ldots, B_{n'-k+1}$. Rozważmy zbiór X tych wierzchołków z V_k, które są niepołączone z pewnym wierzchołkiem z A_{k+1}.

Udowodnimy, że istnieje takie $1 \leqslant i \leqslant n'-k+1$, że $B_i \subseteq X$. Gdyby tak nie było, to dla każdego i zachodziłoby $|X \cap B_i| \leqslant |B_i| - 1$, czyli

$$|X| \leqslant (|B_1|-1)+(|B_2|-1)+\ldots+(|B_{n'-k+1}|-1) = n' - (n'-k+1) = k-1.$$

Zauważmy jednak, że $|X| \geqslant k$, ponieważ w każdym ze zbiorów $A_1, \ldots, A_k$ istniał choć jeden wierzchołek niepołączony z pewnym elementem A_{k+1}. Ta sprzeczność dowodzi, że istnieje takie i, że $B_i \subseteq X$.

Niech $|A_{k+1}| = s$. Skonstruujemy s zbiorów niezależnych C_v, przy czym $v \in A_{k+1}$. Dla każdego $v \in A_{k+1}$ niech $v \in C_v$ oraz dla każdego $u \in B_i$ niech $u \in C_v$ dla pewnego $v \in A_{k+1}$ niepołączonego z u (powyżej udowodniliśmy, że w ogóle jakiś istnieje). Łatwo zauważyć, że zbiory C_v będą niezależne.

Po zastąpieniu w ciągu $B_1, \ldots, B_{n'-k+1}$ zbioru B_i przez s zbiorów C_v dla $v \in A_{k+1}$, otrzymujemy $n'+s-k = n-(k+1)+1$ rozłącznych zbiorów niezależnych sumujących się do V, co kończy dowód indukcyjny.

Sposób II

Przeprowadzimy dowód indukcyjny po n. Dla $n=1$ teza jest oczywista. Dalej załóżmy, że teza zadania jest prawdziwa dla $n-1$.

Jeżeli dla każdej liczby $i=1,\ldots,k$ zbiór A_i jest co najwyżej jednoelementowy, to teza jest oczywista. Załóżmy bez straty ogólności, że $|A_1| \geqslant 2$ i niech v, u będą dwoma różnymi wierzchołkami z A_1.

Rozważmy graf G' powstały przez zastąpienie w G wierzchołków u i u' jednym wierzchołkiem w, którego sąsiedztwo jest przecięciem sąsiedztwa u i u' w G (lub inaczej mówiąc, dopełnienie sąsiedztwa w jest sumą dopełnień sąsiedztw u i u'). Niech $A_1' = A_1 \setminus \{v,u\} \cup \{w\}$. Wtedy wierzchołki G' można podzielić na takie zbiory $A_1', A_2, \ldots, A_k$, że z każdej pary zbiorów można wybrać po jednym wierzchołku, między którymi nie ma krawędzi. W takim razie z założenia indukcyjnego wierzchołki grafu G' można podzielić na $(n-1)-k+1 = n-k$ zbiorów niezależnych $B_1, \ldots, B_{n-k}$, bez straty ogólności załóżmy, że $w \in B_1$.

W takim razie każdy wierzchołek $v \in B_1$ nie jest połączony krawędzią z u lub z u', więc możemy przedstawić B_1 jako sumę rozłącznych zbiorów B_u i $B_{u'}$, przy czym dla każdego $v \in B_u$ wierzchołki v i u nie są połączone krawędzią i podobnie dla każdego $v \in B_{u'}$ wierzchołki v i u' nie są połączone krawędzią. Wtedy $B_u, B_{u'}, B_2, \ldots, B_{n-k}$ jest podziałem V na $n-k+1$ zbiorów niezależnych, co należało dowieść.

25. Iloczyn dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c jest równy $(\sqrt{2}-1)^3$. Wykazać, że nie wszystkie z liczb $\frac{1}{a}-b, \frac{1}{b}-c, \frac{1}{c}-a$ są mniejsze od 2.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że teza zadania nie jest prawdziwa. Mnożąc nierówności $\frac{1}{a}-b<2$ i $\frac{1}{b}-c<2$ odpowiednio przez a oraz $2ab$ dostajemy

$$1 < 2a+ab \quad \text{oraz} \quad 2a < 4ab+2abc,$$

czyli po dodaniu stronami

$$1 < 5ab + 2abc = 5ab + 2(\sqrt{2} - 1)^3,$$

więc

$$ab > 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2.$$

Po pomnożeniu tej nierówności z analogicznymi nierównościami $bc > (\sqrt{2} - 1)^2$ oraz $ca > (\sqrt{2} - 1)^2$ dostajemy sprzeczność, która kończy dowód nie wprost.

26. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC ($AB < AC$), w którym AH jest wysokością, AM środkową, a O jest środkiem okręgu opisanego. Symetralne boków AB i AC przecinają AH w P i Q. Niech J będzie środkiem okręgu opisanego na OPQ. Udowodnić, że $\sphericalangle CAJ = \sphericalangle BAM$.

Rozwiązanie:

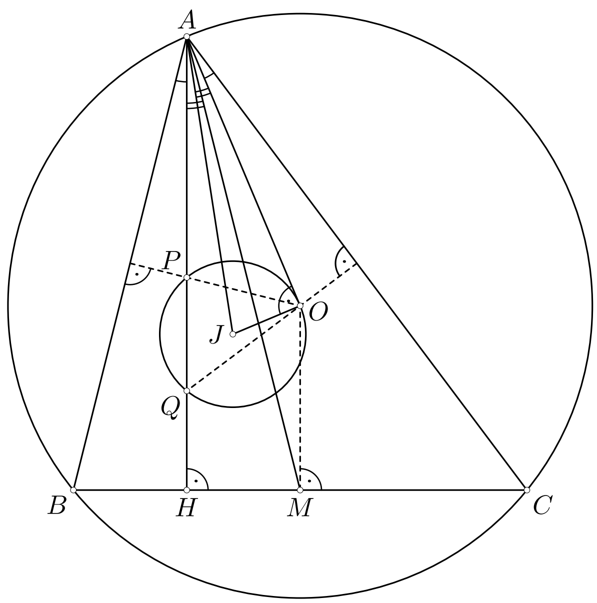
Sposób I

Zauważmy, że trójkąty ABC i OPQ są podobne, ponieważ ich odpowiednie boki są prostopadłe. Skala tego podobieństwa jest równa stosunkowi AH do wysokości opuszczonej z O w trójkącie OPQ, która jest równa HM. Z drugiej strony jest równa stosunkowi promieni okręgów opisanych na tych trójkątach. Ponadto odpowiednie promienie są prostopadłe. Stąd

$$\frac{AO}{OJ} = \frac{AH}{HM} \quad \text{oraz} \quad AO \perp OJ,$$

więc $\triangle AOJ \sim \triangle AHM$, zatem

$$\sphericalangle BAM = \sphericalangle BAH + \sphericalangle HAM = \sphericalangle CAO + \sphericalangle OAJ = \sphericalangle CAJ.$$



Sposób II

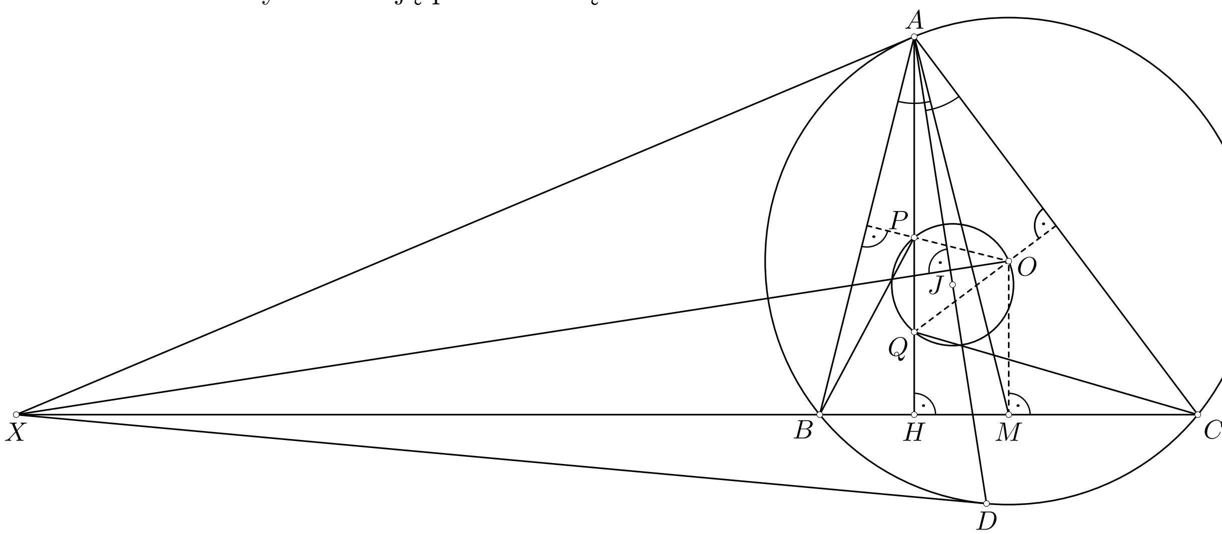
Zauważmy, że trójkąty APB i AOC są podobne. Istotnie, oba są równoramienne, a kąty przy podstawach są w obu trójkątach równe $90° - \sphericalangle CBA$. Wobec tego $\frac{AP}{AO} = \frac{AB}{AC}$. Analogicznie dowodzimy, że $\frac{AQ}{AO} = \frac{AC}{AB}$. Dzieląc otrzymane dwie równości stronami otrzymujemy

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

Niech X będzie punktem przecięcia prostej BC ze styczną w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wówczas $\sphericalangle XAB = \sphericalangle ACX$ i co za tym idzie trójkąty XAB, XCA są podobne. W takim razie

$$\frac{XB}{XC} = \frac{[XBA]}{[XCA]} = \frac{AB^2}{AC^2},$$

gdzie kwadratowe nawiasy oznaczają pole wielokąta.



Zauważmy też, że trójkąty OPQ i ABC są podobne i tak samo zorientowane, gdyż ich odpowiednie boki są prostopadłe. Istnieje więc podobieństwo spiralne o kącie obrotu 90° przekształcające trójkąt OPQ na trójkąt ABC. Podobieństwo to przeprowadza J na O. Co więcej, punkt A jest przeprowadzany na punkt X, gdyż A leży na przedłużeniu odcinka PQ, X leży na przedłużeniu odcinka BC oraz $\frac{AP}{AQ} = \frac{XB}{XC}$. W takim razie prosta AJ jest przeprowadzana na prostą XO, i wobec tego $AJ \perp XO$.

Oznaczając przez D punkt symetryczny do A względem XO otrzymamy, że D leży na AJ, a ponadto XD jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie ABC. Z powszechnie znanych własności symedian wynika więc, że AJ jest symedianą w trójkącie ABC. W szczególności $\sphericalangle CAJ = \sphericalangle BAM$.

27. Dany jest graf, którego wierzchołki mogą być kolorowane na biało lub czarno. Na początku wszystkie wierzchołki grafu są białe. W jednym ruchu możemy wybrać dowolny wierzchołek i zmienić jego kolor oraz wszystkich jego sąsiadów. Rozstrzygnąć, czy dla dowolnego grafu po skończonej liczbie ruchów można pokolorować wszystkie jego wierzchołki na czarno.

Rozwiązanie:

Wykażemy indukcyjnie po liczbie wierzchołków, że w dowolnym grafie można przemalować wszystkie wierzchołki na kolor przeciwny. Dla grafu o jednym wierzchołku teza jest oczywista.

Niech V to zbiór wierzchołków, a E to zbiór krawędzi rozważanego grafu. Załóżmy, że $|V| \geqslant 2$. Rozważmy dowolny wierzchołek $v \in V$. Z założenia indukcyjnego, możemy po skończonej liczbie ruchów zmienić kolory wszystkim wierzchołkom z $V \setminus \{v\}$. Gdyby po takiej procedurze kolor v też się zmienił, to krok indukcyjny byłby udowodniony. Załóżmy zatem, że dla każdego wierzchołka $v \in V$ zastosowanie odpowiednich ruchów zmieniających kolory $V \setminus \{v\}$ nie zmienia koloru v. Nazwijmy tę procedurę zmiany koloru wszystkich wierzchołków poza v *mruganiem* wierzchołka v.

Niech $\deg(v)$ to stopień wierzchołka v. Jeżeli istnieje wierzchołek v, dla którego $2 \mid \deg(v)$, to wystarczy mrugnąć nim oraz wszystkimi jego sąsiadami. Wtedy w sumie będzie nieparzyście wiele mrugnięć, nieparzystą liczbę razy, więc v i jego sąsiedzi nie zmienią koloru, a wszystkie pozostałe wierzchołki zmienią. Wystarczy teraz, że wykonamy jeden ruch zmieniając kolory v i jego sąsiadów.

Dalej zakładamy, że stopień każdego wierzchołka jest nieparzysty. Z lematu o uściskach dłoni wiemy, że

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|,$$

czyli suma $|V|$ liczb nieparzystych jest parzysta, a zatem $2 \mid |V|$. To znaczy, że gdy mrugniemy każdym wierzchołkiem, to każdy zmieni kolor $2 \nmid |V| - 1$ razy, co kończy dowód kroku indukcyjnego.

28. Niech p będzie taką liczbą pierwszą, że liczba $\frac{p-1}{2}$ także jest liczbą pierwszą. Niech a, b, c będą dowolnymi liczbami całkowitymi, niepodzielnymi przez p. Udowodnić, że istnieje co najwyżej $\sqrt{2p} + 1$

dodatnich liczb całkowitych k mniejszych od p, dla których zachodzi

$$p \mid a^k + b^k + c^k.$$

Rozwiązanie:

Niech $q = \frac{p-1}{2}$. Z założenia q jest liczbą pierwszą, więc p musi być większe od 3. Gdyby zachodziło $a \equiv \pm b \pmod{p}$ oraz $a \equiv \pm c \pmod{p}$, to

$$a^k + b^k + c^k \equiv 3a^k \ (mod\ p) \quad \text{lub} \quad a^k + b^k + c^k \equiv \pm a^k \pmod{p},$$

jednak liczby a, b, c nie dzielą się przez p oraz $3 \nmid p$, czyli w tym przypadku nie istnieje żadna liczba k spełniająca warunek z zadania i teza zachodzi. W dalszej części rozwiązania zakładamy bez straty ogólności, że

$$a \not\equiv \pm b \pmod{p}.$$

Ponieważ a jest względnie pierwsze z p, to liczby a, $2a$, $\ldots$, $(p-1)a$ dają różne reszty z dzielenia przez p. Stąd istnieje $1 \leqslant e \leqslant p-1$, dla którego $ae \equiv 1 \pmod{p}$. Oznaczmy przez d rząd eb modulo p, czyli najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą l, dla której $(eb)^l \equiv 1 \pmod{p}$. Wykorzystamy znany następujący znany fakt rzędzie.

Fakt. *Niech p będzie liczbą pierwszą, $p \nmid x$ i niech d będzie rzędem x modulo p. Wtedy dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k, jeśli $x^k \equiv 1 \pmod{p}$, to $d \mid k$.*

Dowód. Niech r będzie resztą z dzielenia k przez d. Wtedy $r < d$ oraz $x^r \equiv 1 \pmod{p}$, stąd z definicji rzędu wynika $r = 0$, co kończy dowód faktu. □

Z małego twierdzenia Fermata $(eb)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, więc d dzieli $p - 1 = 2q$. Ponieważ $eb \not\equiv \pm 1 \pmod{p}$, to

$$d = q \quad \text{lub} \quad d = 2q.$$

Oznaczmy przez S zbiór takich liczb całkowitych $0 < k < p$, że $p \mid a^k + b^k + c^k$. Dla $t \in \{1, \ldots, p-2\}$, niech s_t będzie liczbą uporządkowanych par liczb (i, j) ze zbioru S, dla których $i - j \equiv t \pmod{p-1}$. Udowodnimy, że jeśli $t \neq q$, to

$$s_t \leqslant 2.$$

Rozważmy takie $(i, j) \in S$, że $i - j \equiv t \pmod{p-1}$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} a^j + b^j + c^j &\equiv 0 \pmod{p} \\ a^j c^{i-j} + b^j c^{i-j} + c^i &\equiv 0 \pmod{p} \\ a^j c^{i-j} + b^j c^{i-j} - a^i - b^i &\equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

czyli

$$a^j \cdot \left(c^t - a^t\right) \equiv b^j \cdot \left(b^t - c^t\right) \pmod{p}.$$

Zauważmy, że gdyby $p \mid c^t - a^t$, to $p \mid b^t - c^t$, z czego wynikałoby $a^t \equiv b^t \pmod{p}$. Jednak wtedy byłoby $(eb)^t \equiv 1 \pmod{p}$, stąd musiałoby być $q \mid d \mid t$, a to jest sprzeczne z $q \neq t < 2q$. Możemy zatem zapisać

$$(eb)^j \equiv \frac{b^t - c^t}{c^t - a^t} \pmod{p}.$$

Dla ustalonego t prawa strona jest stała, a reszty potęg liczby eb modulo p powtarzają się co q lub $2q$, to istnieją maksymalnie dwa takie $j \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, aby $(eb)^j$ przyjmowało pewną stałą wartość, czyli faktycznie $s_t \leqslant 2$.

Rozważmy teraz, ile jest uporządkowanych par liczb (i, j) ze zbioru S, dla których $i-j \not\equiv q \pmod{2q}$, czyli na liczbę $L = s_1 + s_2 + \ldots + s_{q-1} + s_{q+1} + \ldots + s_{2q-1}$. Z jednej strony do każdego i możemy dobrać przynajmniej $|S|-2$ liczb $j \in S$, tj. wszystkie elementy S oprócz i oraz ewentualnie oprócz $i+q \pmod{2q}$. To oznacza, że $|S|(|S|-2) \leqslant L$. Z drugiej strony L jest sumą $p-3$ liczb, z których żadna nie przekracza 2, zatem $L \leqslant 2(p-3)$. Ostatecznie

$$\begin{gathered} |S|(|S|-2) \leqslant 2(p-3) \\ (|S|-1)^2 \leqslant 2p-5 \\ |S| \leqslant \sqrt{2p-5}+1 \leqslant \sqrt{2p}+1, \end{gathered}$$

co było do udowodnienia.

29. Danych jest 1000 czerwonych torebek oraz 2021 niebieskich torebek z cukierkami. W każdej czerwonej torebce jest co najwyżej 2021 cukierków, a w każdej niebieskiej jest co najwyżej 1000 cukierków. Ponadto, łączna liczba cukierków w czerwonych torebkach jest mniejsza niż łączna liczba cukierków w niebieskich torebkach. Wykazać, że można wybrać taki niepusty podzbiór torebek T, aby łączna liczba cukierków we wszystkich czerwonych torebkach należących do T była równa łącznej liczbie cukierków we wszystkich niebieskich torebkach należących do T.

Rozwiązanie:

Sposób I

Oznaczmy liczby cukierków w kolejnych czerwonych torebkach jako $r_1, r_2, \ldots, r_{1000}$, a w niebieskich torebkach jako $b_1, b_2, \ldots, b_{2021}$. Z założenia wiemy, że

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_{1000} < b_1 + b_2 + \ldots + b_{2021}.$$

Wobec tego dla dowolnego k możemy wziąć najmniejszy możliwy indeks $f(k)$ o tej własności, że

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_k \leqslant b_1 + b_2 + \ldots + b_{f(k)}.$$

Dla $k = 1, \ldots, 1000$, niech $d_k = (b_1 + \ldots + b_{f(k)}) - (r_1 + \ldots + r_k) \geqslant 0$. Jeśli $d_i = d_j$ dla pewnego $i < j$, to

$$(b_1 + \ldots + b_{f(i)}) - (r_1 + \ldots + r_i) = (b_1 + \ldots + b_{f(j)}) - (r_1 + \ldots + r_j).$$

Po skróceniu widzimy, że suma $r_{i+1} + \ldots + r_j$ jest zerem gdy $f(i) = f(j)$ lub sumą $b_{f(i)+1} + \ldots + b_{f(j)}$. W obu przypadkach teza zachodzi. Załóżmy więc, że liczby $d_1, d_2, \ldots d_{1000}$ są parami różne. Z definicji $f(k)$ wynika, że

$$d_k = (b_1 + \ldots + b_{f(k)}) - (r_1 + \ldots + r_k) = (b_1 + \ldots + b_{f(k)-1}) - (r_1 + \ldots + r_k) + b_{f(k)} < 0 + 1000 = 1000.$$

To oznacza, że każda z liczb $d_1, d_2, \ldots d_{1000}$ jest jedną z liczb ze zbioru $\{0, 2, \ldots, 999\}$. Możliwych wartości jest tyle samo co zmiennych, zatem każda wartość pojawi się dokładnie raz. W szczególności dla pewnego i mamy $d_i = 0$, co w oczywisty sposób daje tezę.

Sposób II

Będziemy oznaczać liczby cukierków tak, jak poprzednio. Niech G będzie grafem skierowanym, którego wierzchołkami są liczby naturalne od 1 do 3021, a zbiorem krawędzi

$$\{(i, i + c_i) \colon i \in \{1, \ldots, 1000\}\} \cup \{(i, i - n_{i-1000}) \colon i \in \{1001, \ldots, 3021\}\}.$$

Fakt. *Jeżeli w grafie skierowanym z każdego wierzchołka wychodzi co najmniej jedna krawędź, to graf zawiera cykl.*

Dowód. Stworzymy ciąg wierzchołków $v_1, v_2, v_3, ...$ w następujący sposób - v_1 jest dowolnym wierzchołkiem, natomiast dla każdego $i > 1$, v_i jest jakimś wierzchołkiem, do którego prowadzi krawędź z v_{i-1}. Ponieważ wierzchołków jest skończenie wiele, kiedyś po raz pierwszy powtórzy się jakiś wierzchołek w tym ciągu - niech $v_j = v_i$ $(j > i)$. Wówczas wierzchołki $v_i, v_{i+1}, ..., v_{j-1}, v_j = v_i$ tworzą oczywiście cykl. □

Powyższy fakt stosuje się do naszego grafu G. Liczby cukierków z czerwonych torebek są dodawane do numeru wierzchołka, a z niebieskich odejmowane oraz po przejściu cyklem numer wierzchołka się nie zmieni. To znaczy, że suma liczb cukierków w odpowiednich torebkach czerwonych jest równa sumie liczb cukierków w odpowiednich torebkach niebieskich. Wybraliśmy dodatnią liczbę torebek, które spełniały tezę zadania, bo znaleziony cykl miał co najmniej jedną krawędź, co kończy dowód.

30. Danych jest n dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n$ o iloczynie równym 1. Udowodnić, że wartość wyrażenia

$$\frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \cdots + \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)}$$

jest większa bądź równa $\frac{2^n-1}{2^n}$.

Rozwiązanie:

Niech $b_0 = 1$ oraz dla $i = 1, \ldots, n$ niech

$$b_i = \frac{1}{(1+a_1)\ldots(1+a_i)}.$$

Zauważmy, że dla każdego $i = 1, \ldots, n$ zachodzi równość

$$\frac{a_i}{(1+a_1)\ldots(1+a_i)} = b_{i-1} - b_i.$$

Zatem

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(1+a_1)\ldots(1+a_i)} = \sum_{i=1}^{n}(b_{i-1} - b_i) = b_0 - b_n = 1 - b_n.$$

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy udowodnić, że

$$(1+a_1)\ldots(1+a_n) \geqslant 2^n.$$

Dla każdego $i = 1, \ldots, n$ prawdziwa jest nierówność $1 + a_i \geqslant 2\sqrt{a_i}$, stąd

$$(1+a_1)\ldots(1+a_n) \geqslant 2^n\sqrt{a_1\ldots a_n} = 2^n.$$

31. Dana jest liczba całkowita $a_1 \geqslant 2$. Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n definiujemy wyraz ciągu a_{n+1} jako najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą, która nie jest względnie pierwsza z a_n oraz jest różna od każdej z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Wykazać, że każda liczba całkowita większa od 1 wystąpi w tym ciągu.

Rozwiązanie:

Na początku udowodnimy lemat, którego będziemy wielokrotnie używać w dalszej części rozwiązania.

Lemat. *Jeżeli w ciągu $a_1, a_2, \ldots$ występuje nieskończenie wiele liczb nie względnie pierwszych z k, to k występuje w tym ciągu.*

Dowód. Wybierzmy na tyle dużą liczbę N, że każda z liczb $a_N, a_{N+1}, \ldots$ jest ściśle większa od k. Zgodnie z założeniem istnieje $M \geqslant N$, dla którego a_M nie jest względnie pierwsze z k. Ponieważ $M + 1 > N$, to $a_{M+1} > k$, czyli k musiało już wystąpić. □

Rozważmy najpierw przypadek, gdy istnieje liczba pierwsza p, która dzieli nieskończenie wiele liczb z zadanego ciągu. Wtedy zgodnie lematem każda liczba postaci pk w nim występuje. Skoro każda liczba postaci pmk pojawia się w ciągu, to ponownie korzystając z lematu wiemy, że k pojawi się w tym ciągu, co dowodzi tezy zadania.

Załóżmy zatem nie wprost, że każda liczba pierwsza dzieli skończenie wiele wyrazów ciągu. To oczywiście znaczy, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p, które dzielą jakiś element z ciągu. Wybierzmy więc takie p, które dodatkowo nie dzieli a_1. Pokażemy, że $2p$ występuje w ciągu.

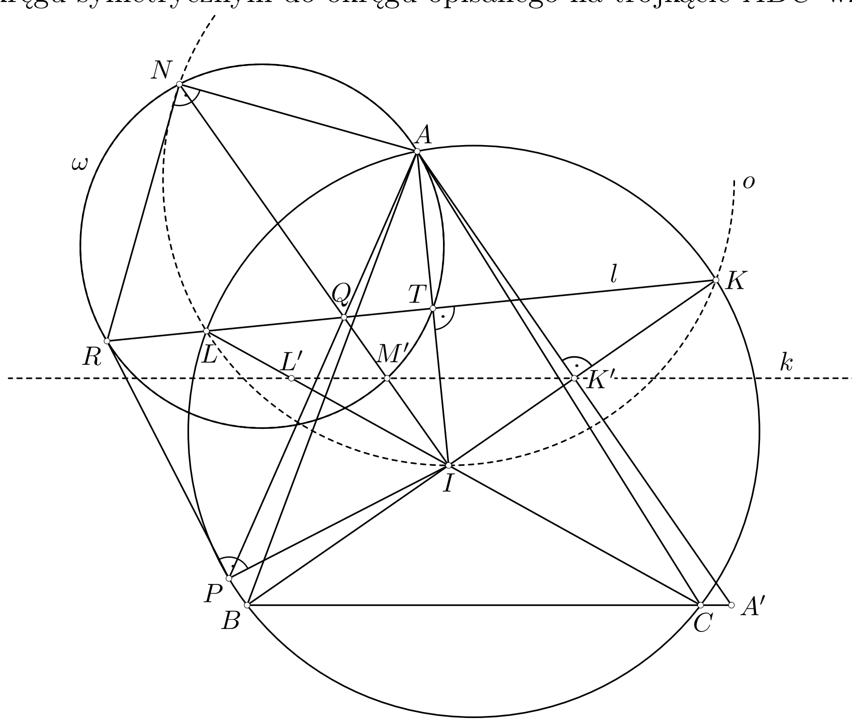
Niech n będzie najmniejszą liczbą, dla której $p \mid a_n$. Wiemy, że $n \geqslant 2$, więc niech q będzie najmniejszym dzielnikiem pierwszym a_{n-1}. Skoro pq nie jest względnie pierwsze z a_{n-1}, to $a_n \leqslant pq$, ale a_n ma wspólny dzielnik z a_{n-1}, więc $a_n = pq$. Liczba $a_n > p$ to najwcześniejsza wielokrotność p w ciągu. To znaczy, że $a_{n+1} = p$ lub a_{n+1} jest wielokrotnością q mniejszą od p. Z kolei każda z liczb $q, 2q, \ldots, (p-1)q < a_n$ nie jest względnie pierwsza z a_{n-1}, czyli musiały one wszystkie wystąpić w ciągu przed a_n, z czego wynika $a_{n+1} = p$. To znaczy, że a_{n+2} jest wielokrotnością p, zatem $a_{n+2} = 2p$ lub $2p$ już wystąpiło. Z tego wynika, że 2 dzieli nieskończenie wiele liczb z ciągu, co jest sprzeczne z założeniem, co kończy dowód.

32. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ostrokątny ABC. Prosta l jest symetralną odcinka AI. Punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Proste AP i l przecinają się w punkcie Q. Niech R będzie takim punktem na prostej l, że $\sphericalangle IPR = 90°$. Prosta k przechodząca przez środki odcinków AB i AC oraz prosta IQ przecinają się w punkcie M. Udowodnić, że $\sphericalangle AMR = 90°$.

Rozwiązanie:

Sposób I

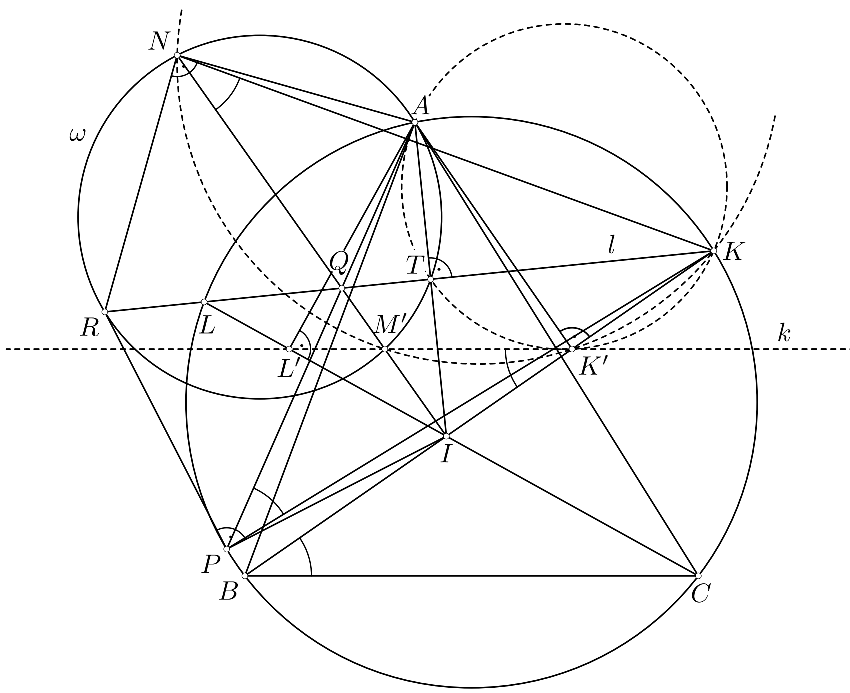
Oznaczmy przez T środek odcinka AI. Niech M' oznacza przecięcie IQ z okręgiem ω o średnicy AR. Teza sprowadza się do pokazania, że punkty M, M' się pokrywają, czyli że M' leży na prostej k. Niech N będzie punktem symetrycznym do P względem prostej l. Wówczas punkty I, Q, N są współliniowe, gdyż są symetryczne względem l odpowiednio do A, Q, P. Ponadto $\sphericalangle RNA = \sphericalangle RPI = 90°$, więc punkt N leży na okręgu ω. Wiemy, że środki krótszych łuków AC, AB leżą na l. Oznaczmy je przez odpowiednio K, L. Punkt I jest symetryczny do A względem KL, a N jest symetryczny do P względem KL, więc punkty K, L, I, N leżą na okręgu symetrycznym do okręgu opisanego na trójkącie ABC względem prostej KL.



Z potęgi punktu mamy, że $\sqrt{IM' \cdot IN} = \sqrt{IT \cdot IA}$. Rozważmy inwersję o środku w I oraz takim promieniu. Niech K' będzie obrazem K w naszej inwersji. Oczywiście A i T są swoimi obrazami, zatem skoro $\sphericalangle ITK = 90°$, to również $\sphericalangle IK'A = 90°$. Prosta IK jest dwusieczną kąta ABC, czyli odbicie symetryczne A' punktu A względem IK leży na boku BC. To oznacza, że środek odcinka AA', którym jest punkt K', leży na k. Analogicznie pokazujemy że obraz inwersyjny L' punktu L leży na k. To zaś oznacza, że obrazem okręgu o przechodzącego przez punkty K, L oraz środek inwersji jest prosta k. W szczególności, skoro $N \in o$, to $M' \in k$, co kończy dowód.

Sposób II

Podobnie jak w sposobie pierwszym, oznaczamy odbicie P względem KL przez N, pokazujemy, że N leży na okręgu ω o średnicy AR oraz na prostej IQ i definiujemy M' jako drugi punkt przecięcia okręgu ω z prostą IQ.



Oznaczamy przez K', L' rzuty punktu A odpowiednio na BI, CI i tak jak w sposobie pierwszym dowodzimy, że leżą one na k. Punkty K, K', T, A leżą na okręgu o średnicy AK gdyż oba kąty $KK'A$, KTA są proste. Stąd $IK \cdot IK' = IA \cdot IT = IN \cdot IM'$, więc punkty K, K', M', N leżą na jednym okręgu. Mamy

$$\sphericalangle M'K'I = \sphericalangle M'NK = \sphericalangle INK = \sphericalangle APK = \sphericalangle CBK' = \sphericalangle L'K'I,$$

co oznacza, że punkty K', L', M' są współliniowe, tj. M' leży na prostej k. Stąd M' pokrywa się z M i mamy $\sphericalangle AMR = 90°$.

Zawody drużynowe

1. Dla dowolnej permutacji σ zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$ mówimy, że para $(i,j)\in\{1,2,\ldots,n\}^2$ jest *odwrócona*, gdy $i<j$, ale $\sigma(i)>\sigma(j)$. Zbiór wszystkich odwróconych par permutacji σ oznaczamy przez $A(\sigma)$. Niech S_n będzie zbiorem wszystkich permutacji zbioru n-elementowego. Wykazać, że

$$\sum_{\sigma\in S_{2021}} 2021^{-|A(\sigma)|} < 3\,.$$

Rozwiązanie:
Udowodnimy następujące dwa lematy.

Lemat 1. *Niech $x\in(0,1)$ oraz niech $n\in\mathbb{Z}_+$. Wtedy*

$$\sum_{\sigma\in S_n} x^{|A(\sigma)|} \leqslant \frac{1}{(1-x)^{n-1}}\,.$$

Dowód. Niech $P_n(x)=\sum_{\sigma\in S_n} x^{|A(\sigma)|}$. Zastosujemy indukcję po n. Dla $n=1$ mamy

$$P_1(x)=1=\frac{1}{(1-x)^0}\,.$$

Niech więc $n\geqslant 2$. Zauważmy, że każdą permutację $\sigma\in S_n$ możemy w jednoznaczny sposób otrzymać z pewnej permutacji $\sigma'\in S_{n-1}$ poprzez „wstawienie” elementu $n+1$ na jedną z $n+1$ pozycji – na początek, po 1. elemencie, po 2. elemencie, …, po n-tym elemencie (na koniec). Wtedy liczba odwróconych par odpowiednio nie zmienia się, rośnie o 1, rośnie o 2, …, rośnie o n. Wobec tego zachodzi

$$P_n(x)=P_{n-1}(x)(1+x+\cdots+x^n)=P_{n-1}(x)\frac{1-x^{n+1}}{1-x}<\frac{P_{n-1}(x)}{1-x}\leqslant\frac{1}{(1-x)^{n-1}}\,,$$

gdyż na mocy założenia indukcyjnego $P_{n-1}(x)\leqslant\frac{1}{(1-x)^{n-2}}$. □

Lemat 2. *Dla dowolnego całkowitego $n\leqslant 2$ zachodzi*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3\,.$$

Dowód. Zauważmy, że

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)\cdot n^{-k}}{k!}\leqslant 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\leqslant 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}<1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3\,.$$

□

Stosując lemat 1 dla $n=2021$ oraz $x=\frac{1}{2021}$ otrzymujemy

$$\sum_{\sigma\in S_{2021}} 2021^{-|A(\sigma)|}\leqslant\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2021}\right)^{2020}}=\left(1+\frac{1}{2020}\right)^{2020}<3\,,$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z lematu 2.

Uwaga: Lemat 2 można zastąpić mocniejszym, znanym twierdzeniem.

Twierdzenie. *Niech* $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. *Wtedy ciąg* a_n *jest rosnący i dąży do* $e \approx 2,718$. *Liczba* e *znana jest jako liczba Eulera.*

2. Dany jest niestały wielomian $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n definiujemy wielomian $Q_n(x)$ jako:

$$Q_n(x) = (x+1)^n P(x) + x^n P(x+1).$$

Wykazać, że istnieje jedynie skończenie wiele takich n, że $Q_n(x)$ ma komplet pierwiastków rzeczywistych.

Uwaga: Wielomian $W(x)$ ma komplet pierwiastków rzeczywistych, jeśli można go zapisać w postaci $a(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)$ dla pewnych, niekoniecznie różnych liczb rzeczywistych $a, x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Rozwiązanie:

Udowodnimy najpierw następujący lemat.

Lemat. *Jeżeli wielomian* $P(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x_1 + a_0$ *ma* m *pierwiastków rzeczywistych, to* $a_{m-1}^2 - 2a_m a_{m-2} \geqslant 0$.

Dowód. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_m$ będą pierwiastkami wielomianu. Wówczas z wzorów Viete'a $\sum_{i=1}^{m} x_i = -\frac{a_{m-1}}{a_m}$, $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m} x_i x_j = \frac{a_{m-2}}{a_m}$. Mamy

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2 - 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m} x_i x_j = \left(\frac{a_{m-1}}{a_m}\right)^2 - 2\frac{a_{m-2}}{a_m}.$$

Zatem $\left(\frac{a_{m-1}}{a_m}\right)^2 - 2\frac{a_{m-2}}{a_m} \geqslant 0$ oraz $a_m^2 > 0$, więc możemy pomnożyć nierówność stronami przez a_m^2 otrzymując $a_{m-1}^2 - 2a_{m-2}a_m \geqslant 0$. □

Niech $P(x) = ax^k + bx^{k-1} + cx^{k-2} + R(x)$, gdzie R jest wielomianem stopnia co najwyżej $k-3$ (jeśli $k=1$, to przyjmujemy $c=0$). Wówczas

$$\begin{aligned}
Q_n(x) &= (x+1)^n(ax^k + bx^{k-1} + cx^{k-2} + \ldots) + x^n(a(x+1)^k + b(x+1)^{k-1} + c(x+1)^{k-2} + \ldots)\\
&= (x^n + nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} + \ldots)(ax^k + bx^{k-1} + cx^{k-2} + \ldots)\\
&+ x^n(a(x^k + kx^{k-1} + \binom{k}{2}x^{k-2} + \ldots) + b(x^{k-1} + (k-1)x^{k-2} + \ldots) + c(x^{k-2} + \ldots) + \ldots)\\
&= 2ax^{n+k} + (2b + a(n+k))x^{n+k-1} + \left(a\left(\binom{n}{2} + \binom{k}{2}\right) + (n+k-1)b + 2c\right)x^{n+k-2} + \ldots
\end{aligned}$$

Gdyby ten wielomian miał $n+k$ pierwiastków rzeczywistych oznaczałoby to na mocy lematu, że

$$(2b + a(n+k))^2 - 2\cdot 2a\left(a\left(\binom{n}{2} + \binom{k}{2}\right) + (n+k-1)b + 2c\right) \geqslant 0.$$

Lewa strona jest funkcją kwadratową od n, w której współczynnik przy n^2 jest równy $-a^2$, w szczególności jest ujemny. Zatem z własności funkcji kwadratowej nierówność może być spełniona tylko dla skończenie wielu n.

3. Dwóch graczy gra w grę z wykorzystaniem dwóch stosów monet. Początkowo pierwszy stos zawiera m monet, a drugi n monet, gdzie $m > n > 0$. Gracze naprzemiennie wykonują ruchy. W pojedynczym ruchu gracz może zabrać z jednego stosu pewną dodatnią liczbę monet będącą wielokrotnością liczby monet na drugim stosie. Wygrywa gracz, który zabierze ostatnią monetę z jednego ze stosów. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste α, dla których dla dowolnych m i n prawdziwe jest zdanie:

jeśli $m > \alpha n$, to gracz rozpoczynający ma strategię wygrywającą.

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że zbiór liczb α spełniających warunki zadania to przedział $[\varphi, \infty)$, gdzie $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ jest jednym z rozwiązań równania $\varphi^2 = \varphi + 1$. Zaczniemy od pokazania prostego technicznego faktu.

Lemat 1. *Niech x, y będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Wtedy $\frac{x}{y} < \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{x+y}{x} > \varphi$.*

Dowód. Druga nierówność jest równoważna nierówności $\frac{y}{x} > \varphi - 1$. Gdyby zachodziło $\frac{x}{y} < \varphi$ oraz $\frac{y}{x} \leqslant \varphi - 1$, to

$$1 = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} < \varphi(\varphi - 1) = \varphi^2 - \varphi = 1.$$

W analogiczny sposób pokazujemy, że nie może jednocześnie zachodzić $\frac{x}{y} \geqslant \varphi$ oraz $\frac{y}{x} > \varphi - 1$. □

Wróćmy do rozwiązania zadania. Stan podanej gry możemy opisać za pomocą pary liczb (m, n), gdzie $m, n \geqslant 0$ to liczby monet odpowiednio na pierwszym i drugim stosie. Będziemy pisać $(m, n) \to (m', n')$, jeśli ze stanu gry (m, n) można wykonać taki ruch, po którym wysokości odpowiednich stosów są równe m' i n'. Powiemy, że stan gry jest *dobry*, jeśli $m = n > 0$ lub gdy $\max(m, n) > \varphi \min(m, n) > 0$. W przeciwnym razie powiemy, że stan gry jest *zły*.

Lemat 2. *Jeżeli stan gry (m, n) jest dobry, to istnieje ruch $(m, n) \to (m', n')$ prowadzący do złego stanu gry (m', n').*

Dowód. Jeżeli $m = n$, to ruch $(m, n) \to (0, n)$ jest poprawny i prowadzi do złego stanu gry. Bez straty ogólności załóżmy teraz, że $m > \varphi n$. Rozważmy ruch $(m, n) \to (m_1', n_1')$, gdzie $m_1' = m - \lfloor \frac{m}{n} \rfloor n$ oraz $n' = n$. Widzimy, że $m_1' < n_1'$. Jeżeli stan (m_1', n_1') jest zły, to znaleźliśmy szukany ruch. W szczególności zauważmy, że gdyby $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor = 1$, to z Lematu 1 zastosowanego dla $x = n$ i $y = m - n$, stan (m_1', n_1') jest zły, ponieważ $\frac{n_1'}{m_1'} = \frac{n}{m-n} < \varphi$.

Załóżmy, że stan (m_1', n_1') jest dobry, czyli $n_1' > \varphi m_1'$. Wtedy z powyższej obserwacji wnioskujemy, że $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor \geqslant 2$, więc możemy rozważyć ruch $(m, n) \to (m_2', n_2')$, gdzie $m_2' = m - (\lfloor \frac{m}{n} \rfloor - 1)n$ oraz $n_2' = n$, czyli $m_2' = m_1' + n_1'$ oraz $n_2' = n_1'$. Wtedy stan (m_2', n_2') jest zły, ponieważ $m_2' > n_2'$ oraz $\frac{m_2'}{n_2'} = \frac{m_1'+n_1'}{n_1'} < \varphi$ na mocy Lematu 1 zastosowanego dla $x = n_1'$ i $y = m_1'$.

□

Lemat 3. *Jeżeli stan gry (m, n) jest zły, to każdy ruch $(m, n) \to (m', n')$ prowadzi do dobrego stanu gry.*

Dowód. Jeżeli $m = 0$ lub $n = 0$, to teza w oczywisty sposób jest spełniona – nie można wtedy wykonać żadnego ruchu ze stanu (m, n). Bez straty ogólności załóżmy teraz, że $\varphi n > m > n > 0$. Ponieważ $\varphi < 2$, to jedyny ruch, jaki można wykonać ze stanu (m, n), jest ruch $(m, n) \to (m', n')$, gdzie $m' = m - n$ oraz $n' = n$. Mamy wtedy $m' > 0$ oraz $n' = n > m - n > m'$. Ponadto ponieważ $\frac{m}{n} < \varphi$, to z Lematu 1 zastosowanego dla $x = n$ i $y = m - n$ dostajemy $\frac{n'}{m'} = \frac{n}{m-n} > \varphi$, co oznacza, że stan (m', n') jest dobry. □

Z Lematów 2 i 3 łatwo wynika, że jeśli aktualny stan gry jest dobry, to gracz rozpoczynający ma strategię wygrywającą, a jeśli stan gry jest zły, to gracz rozpoczynający nie ma strategii wygrywającej. Istotnie, wszystkie przegrywające stany postaci $(0, n)$ i $(m, 0)$ są z definicji złe. Ponadto, jeśli początkowy stan jest dobry, to na mocy Lematów 2 i 3, pierwszy gracz może zagwarantować, że przed jego każdym ruchem stan gry jest dobry.

4. Udowodnić, że w grafie, w którym każdy cykl długości co najmniej 4 ma cięciwę, istnieje wierzchołek, którego sąsiedztwo jest kliką.

Uwaga: Cięciwa cyklu $A_1A_2\dots A_n$ to krawędź A_iA_j, gdzie $|i-j|>1$ oraz $\{i,j\}\neq\{1,n\}$. Klika to taki zbiór wierzchołków, że każde dwa z nich są połączone krawędzią (pojedynczy wierzchołek i zbiór pusty to także kliki).

Rozwiązanie:

Niech $E(G)$ będzie zbiorem krawędzi grafu G i niech $N(v)$ będzie sąsiedztwem wierzchołka v. Graf, w którym każdy cykl o co najmniej 4 wierzchołkach ma cięciwę nazwiemy grafem cięciwowym. Separator grafu spójnego G to taki zbiór wierzchołków, że po usunięciu tych wierzchołków i wszystkich krawędzi z nich wychodzących graf przestaje być spójny, ale nadal jest niepusty. Separator jest minimalny, jeżeli żaden jego podzbiór nie jest separatorem. Wykażemy najpierw następujący lemat.

Lemat (Twierdzenie Diraca o grafach cięciwowych)**.** *Każdy separator minimalny spójnego grafu cięciwowego G jest kliką.*

Dowód. Niech V będzie minimalnym separatorem G. Jeżeli $|V|=1$, teza jest trywialnie spełniona. Niech więc $|V|\geqslant 2$. Załóżmy nie wprost, że pewne $u,\ v\in V$ nie są połączone krawędzią. Niech $U_1,\ U_2,\ \dots,\ U_k$ będą spójnymi składowymi grafu $G\setminus V$ (z założeń zadania $k\geqslant 2$. Gdyby v nie był połączony z żadnym wierzchołkiem pewnego U_i, to zbiór $V\setminus\{v\}$ także byłby separatorem (w grafie G nie istniałaby ścieżka z U_i do $G\setminus(V\cup U_i)$.), co przeczy minimalności V. Zatem dla każdego $i\in\{1,\ 2,\ \dots,\ k\}$ istnieje x_i, taki że $vx_i\in E(G)$. Podobnie, dla każdego $i\in\{1,\ 2,\ \dots,\ k\}$ istnieje y_i (niekoniecznie różny od x_i), taki że $uy_i\in E(G)$. Z definicji składowej spójnej musi istnieć ścieżka $\mathcal{P}_1$ w U_1 łącząca x_1 z y_1, więc w $V\cup U_1$ istnieje ścieżka łącząca u z v, która nie zawiera wierzchołków z V poza u i v. Niech $\mathcal{P}_1=ua_1a_2\dots a_mv$ będzie najkrótszą taką ścieżką. u nie sąsiaduje z v, więc $m\geqslant 1$. Gdyby u sąsiadował z a_i dla $i\neq 1$, v sąsiadował z a_i dla $i\neq m$ lub a_i sąsiadował z a_j dla $|i-j|>1$ moglibyśmy skrócić ścieżkę $\mathcal{P}_1$, co przeczy jej minimalności. Przyjmijmy więc, że opisane wierzchołki nie sąsiadują (tj. gdyby $uv\in E(G)$, to w cyklu $ua_1a_2\dots a_mv$ nie byłoby cięciw). Niech $\mathcal{P}_2=ub_1b_2\dots b_lv$ będzie analogiczną najkrótszą ścieżką łączącą u i v w $V\cup U_2$, gdzie $b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_l\in U_2$. Z definicji separatora żaden a_i nie sąsiaduje z żadnym b_j. W połączeniu z wcześniejszymi obserwacjami o niemożności skrócenia $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ wnioskujemy, że $ua_1a_2\dots a_mvb_lb_{l-1}\dots b_1$ jest cyklem niezawierającym przekątnych. Skoro $m,\ l\geqslant 1$, to cykl ten ma długość co najmniej 4, co przeczy założeniom lematu i kończy dowód.

□

Przejdźmy teraz do rozwiązania zadania. Wierzchołek nazwiemy *fajnym*, jeżeli jego sąsiedztwo jest kliką. Niech n będzie liczbą wierzchołków G. Udowodnimy tezę silniejszą – G zawiera co najmniej 2 niepołączone fajne wierzchołki, o ile G nie jest kliką (wtedy zawiera co najmniej jeden fajny wierzchołek). Dowód przeprowadzimy poprzez indukcję po n. Dla $n=1$ teza jest trywialna (G jest kliką). Niech teraz $n\geqslant 2$. Jeżeli G nie jest spójny, to ma składowe spójne $G_1,\ G_2,\ \dots,\ G_m$, zaś z założenia G_1 i G_2 zawierają co najmniej jeden fajny wierzchołek (sąsiedztwo wierzchołka z G_1 nie zmienia się po dodaniu innych składowych spójnych grafu G, więc wierzchołki fajne w G_1 pozostają fajne w G), wobec czego G ma przynajmniej 2 niepołączone fajne wierzchołki. Załóżmy teraz, że G jest spójny. Jeżeli G jest kliką, to oczywiście wszystkie wierzchołki są fajne. Niech więc G nie będzie kliką. Wybierzmy dowolny wierzchołek v, który nie sąsiaduje z pewnym wierzchołkiem v'. Zauważmy, że $G\setminus\{v,\ v'\}$ jest separatorem w G, więc pewien podzbiór $U\subset(G\setminus\{v,\ v'\}$ jest separatorem minimalnym, a więc kliką. W takim razie istnieją niepuste i rozłączne zbiory wierzchołków $A,\ B$, takie że gdy $a\in A$ oraz $b\in B$, to a i b ze sobą nie sąsiadują, $A\cup B\cup U=V(G)$ oraz A i B są rozłączne z U. Gdyby $A\cup U$ było kliką, to dowolny wierzchołek w A jest fajny w $A\cup U$. Jeżeli A nie jest kliką, to z założenia indukcyjnego istnieją dwa fajne wierzchołki w $A\cup U$, więc istnieje przynajmniej jeden wierzchołek w A, który jest fajny w $A\cup U$. Wierzchołek $x\in A$, który jest fajny w $A\cup U$ jest też fajny w G, gdyż $N(x)\cap B=\emptyset$. W takim razie istnieje wierzchołek $x\in A$, który jest fajny w G. Podobnie, istnieje wierzchołek $y\in B$, który jest fajny w G, więc w G istnieją przynajmniej 2 fajne wierzchołki. Skoro $x\in A$ i $y\in B$, to x i y są niepołączone, co kończy dowód.

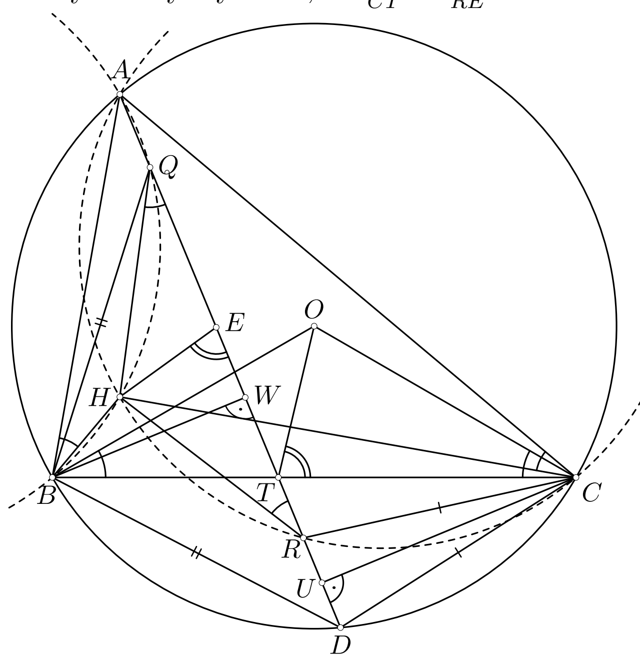
5. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, zaś H jego ortocentrum. Punkt D leży na krótszym łuku BC okręgu opisanego na ABC, punkt T jest punktem przecięcia prostych AD i BC, zaś punkt E jest symetryczny do D względem T. Załóżmy, że $E \neq H$. Wykazać, że kąty OTB oraz HED są równe lub sumują się do $180°$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez Q, R drugie punkty przecięcia prostej AD odpowiednio z okręgami opisanymi na trójkątach AHB i AHC. Wtedy

$$\sphericalangle QRH = \sphericalangle ACH = \sphericalangle OCB = \sphericalangle OBC = \sphericalangle ABH = \sphericalangle RQH,$$

więc $\triangle HQR \sim \triangle OBC$, zatem wystarczy wykazać, że $\frac{BT}{CT} = \frac{QE}{RE}$.



Zauważmy, że

$$\sphericalangle DRC = 180° - \sphericalangle ARC = 180° - \sphericalangle AHC = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC,$$

więc $CR = CD$, analogicznie $BQ = BD$.

Niech W, U będą rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów B, C na prostą AD. Z powyższej obserwacji wynika, że są one jednocześnie środkami odcinków odpowiednio DQ oraz DR. Z twierdzenia Talesa wynika, że $\frac{BT}{CT} = \frac{WT}{UT}$. Jednokładność o środku w D i skali 2 przeprowadza punkty W, U, T odpowiednio na Q, E, R, skąd $\frac{WT}{UT} = \frac{QE}{RE}$, co kończy dowód.

6. Dany jest trójkąt ABC. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą i niech $B = B_1, B_2, \cdots, B_n, B_{n+1} = C$ będą punktami leżącymi w tej kolejności na boku BC. Dla $j = 1, \ldots, n$ przez r_j oznaczmy długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt AB_jB_{j+1} oraz przez r długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Udowodnić, że istnieje λ, która nie zależy od n i dla której spełniona jest równość

$$(\lambda - r_1)(\lambda - r_2) \cdots (\lambda - r_n) = \lambda^{n-1}(\lambda - r).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez h długość wysokości opuszczonej z A w trójkącie ABC. Udowodnimy, że $\lambda = h/2$ spełnia warunki zadania.

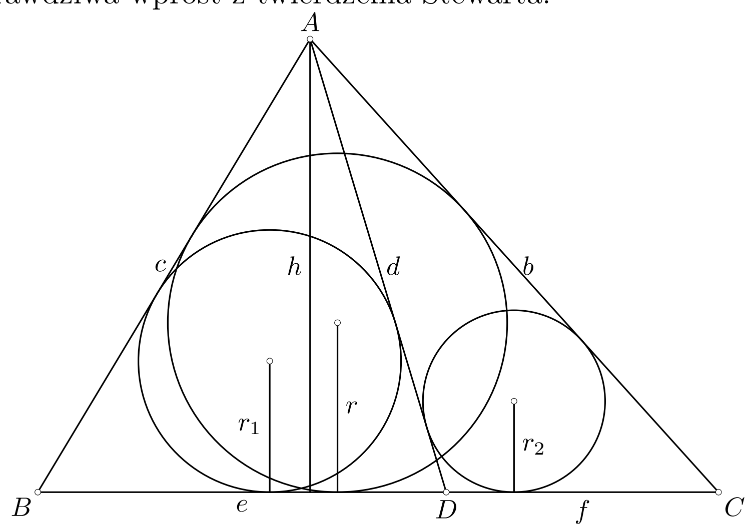
Najpierw rozważmy przypadek, w którym $n = 2$. Zamiast B_2 będziemy używali oznaczenia D. Dodatkowo oznaczmy $c = AB, b = AC, a = AB, d = AD, e = BD, f = CD$. Przyrównując znane wzory na pole trójkąta otrzymujemy równości

$$\frac{h-2r}{h} = \frac{b+c-a}{b+c+a}, \ \frac{h-2r_1}{h} = \frac{c+d-e}{c+d+e}, \frac{h-2r_2}{h} = \frac{b+d-f}{b+d+f}.$$

Przekształcamy tezę równoważnie:

$$\begin{aligned}
(c+d-e)(b+d-f)(b+c+a) &= (c+d+e)(b+d+f)(b+c-a)\\
(c+d)(b+d)a + efa &= (c+d)f(b+c) + e(b+d)(b+c)\\
cba + \underline{dba + cda} + a(d^2+ef) &= \underline{(b+c)d(e+f)} + (b+c)(cf+be)\\
\underline{cba} + a(d^2+ef) &= \underline{bc(e+f)} + c^2 f + b^2 e\\
a(d^2+ef) &= b^2 e + c^2 f.
\end{aligned}$$

Ostatnia równość jest prawdziwa wprost z twierdzenia Stewarta.



Dowód dla dowolnego n przeprowadzamy przez indukcję. Przez r' oznaczmy promień okręgu wpisanego w trójkąt ABB_n. Z założenia indukcyjnego mamy

$$(\lambda - r_1)(\lambda - r_2)\cdots(\lambda - r_{n-1}) = \lambda^{n-2}(\lambda - r').$$

Podobnie mamy

$$(\lambda - r')(\lambda - r_n) = \lambda(\lambda - r).$$

Mnożąc równości stronami otrzymujemy tezę zadania.

7. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n, że liczby n, $n+1$, $n+2$ są sumami dwóch kwadratów dodatnich liczb całkowitych.

Rozwiązanie:

Sposób I

W rozwiązaniu pomocny będzie następujący fakt.

Fakt. *Dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej A równanie*

$$x^2 - 2y^2 = 1 \tag{1}$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych $x,\ y > A$.

Dowód. Zauważmy, że para $(x,\ y) = (3,\ 2)$ spełnia równanie (1). Niech teraz $(x_1,\ y_1)$ będzie pewnym rozwiązaniem równania (1) oraz $x_1,\ y_1 \in \mathbb{Z}_+$. Zauważmy, że

$$1 = x_1^2 - 2y_1^2 = (3x_1 + 4y_1)^2 - 2(2x_1 + 3y_1)^2\,,$$

więc para $(x_2,\ y_2) = (3x_1+4y_1,\ 2x_1+3y_1)$ także jest rozwiązaniem danego równania w dodatnich liczbach całkowitych. Ponadto $x_1+y_1 < (3x_1+4y_1)+(2x_1+3y_1) = x_2+y_2$. W takim razie z pewnego rozwiązania równania (1) w dodatnich liczbach całkowitych możemy otrzymać kolejne rozwiązanie o większej sumie zmiennych. Niech $(x,\ y)$ będzie rozwiązaniem (1) oraz $x+y > 4A$. Wtedy przynajmniej jedna z liczb $x,\ y$ jest większa niż $2A$. Jeżeli $x > 2A$, to

$$y^2 = \frac{x^2-1}{2} > \frac{4A^2}{2} > A^2\,,$$

jeżeli zaś $y > 2A$, to

$$x^2 = 1 + 2y^2 > 8A^2 > A^2\,.$$

W takim razie $x,\ y > A$, co kończy dowód Faktu. □

Niech teraz para $(m,\ a)$ będzie rozwiązaniem równania (1) oraz $m,\ a \geqslant 1$. Wykażemy, że liczba

$$n = (6a)^2 + (18a^2)^2$$

spełnia warunki zadania. Dla różnych liczb a otrzymujemy różne liczby n, zaś możliwych a jest nieskończenie wiele (na mocy Faktu istnieją rozwiązania (1) o dowolnie dużym a). Będzie to oznaczało, że możliwych n jest również nieskończenie wiele, co zakończy rozwiązanie zadania.

Jasne jest, że n jest sumą dwóch kwadratów niezerowych liczb naturalnych. Zauważmy, że

$$n+1 = (6a)^2 + (18a^2)^2 + 1 = (14a^2-1)^2 + 64a^2(2a^2+1) = (14a^2-1)^2 + (8ma)^2\,.$$

Ostatnia równość wynika z tego, że $m^2 = 2a^2+1$. Ponadto

$$n+2 = (6a)^2 + (18a^2)^2 + 2 = (18a^2+1)^2 + 1^2\,.$$

Zatem każda z liczb $n,\ n+1,\ n+2$ jest sumą dwóch kwadratów dodatnich liczb całkowitych, co kończy dowód.

Uwaga: Równanie $x^2 - Dy^2 = 1$ nazywane jest *równaniem Pella* i ma nieskończenie wiele rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych, gdy D nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Sposób II

Wykażemy, że dla każdego a liczba

$$n = (a^2-a)^2 + (a^2-a)^2$$

spełnia warunki zadania. Zauważmy, że

$$n+1 = (a^2-1)^2 + (a^2-2a)^2$$
$$n+2 = (a^2-a+1)^2 + (a^2-a-1)^2\,.$$

Ponadto dla $a \geqslant 3$ każdy z kwadratów jest niezerowy oraz dla różnych a otrzymujemy różne n, co kończy dowód.

8. Dane są względnie pierwsze dodatnie liczby całkowite $n, r > 1$, przy czym n jest nieparzyste. Załóżmy, że istnieją takie wielomiany $P(x), Q(x)$ o współczynnikach całkowitych, że

$$(x-1)^n - (x^n-1) = (x^r-1)P(x) + nQ(x).$$

Udowodnić, że $n \mid r^{n-1} - 1$.

Rozwiązanie:

Ponieważ n i r są względnie pierwsze, to równoważnie można wykazać że $n \mid r^n - r$. Niech

$$F(x) = x^{r-1} + \cdots + x + 1.$$

Oczywiście mamy $F(1)=r$, więc wystarczy udowodnić, że $n \mid F(1)^n - F(1)$, a ponieważ n jest nieparzyste, to można to jeszcze przekształcić do $n \mid ((-1)^{r-1}F(1))^n - (-1)^{r-1}F(1)$.

Niech ω będzie zespolonym pierwiastkiem pierwotnym z jedynki stopnia r. Wtedy $\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{r-1}$ są wszystkimi pierwiastkami $F(x)$, więc

$$F(x) = \prod_{k=1}^{r-1} \left(x - \omega^k\right).$$

Czyli wystarczy wykazać, że

$$n \mid \prod_{k=1}^{r-1} (\omega^k - 1)^n - \prod_{k=1}^{r-1} (\omega^k - 1).$$

Ponieważ n jest względnie pierwsze z r, to

$$\{1, 2, \ldots, r-1\} \equiv \{n, 2n, \ldots, (r-1)n\} \pmod{r},$$

stąd możemy sprowadzić rozwiązanie zadania do wykazania

$$n \mid \prod_{k=1}^{r-1} (\omega^k - 1)^n - \prod_{k=1}^{r-1} ((\omega^k)^n - 1).$$

Korzystając z równości z treści zadania dla $k = 1, \ldots, r-1$ otrzymujemy

$$(\omega^k - 1)^n = (\omega^k)^n - 1 + nQ(\omega^k).$$

Mnożąc równości stronami, otrzymujemy

$$\prod_{k=1}^{r-1} (\omega^k - 1)^n - \prod_{k=1}^{r-1} ((\omega^k)^n - 1) = nR(\omega),$$

przy czym R jest wielomianem o współczynnikach całkowitych. Widzimy, że $R(\omega)$ jest liczbą wymierną, pozostaje udowodnić, że $R(\omega)$ jest liczbą całkowitą.

Niech $G(x)$ będzie unormowanym wielomianem o współczynnikach wymiernych o najmniejszym możliwym stopniu, którego pierwiastkiem jest ω. Niech $G_1(x)$ będzie resztą z dzielenia $F(x)$ przez $G(x)$. Widzimy, że $G_1(\omega) = 0$ (ponieważ $F(\omega) = 0$ i $G(\omega) = 0$) oraz $G_1(x)$ ma stopień mniejszy niż wielomian $G(x)$. Zatem $G_1(x)$ musi być wielomianem zerowym, a $G(x)$ musi dzielić $F(x)$.

Z lematu Gaussa wynika, że $G(x)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych. Wreszcie niech $H(x)$ będzie resztą z dzielenia $R(x)$ przez $G(x)$. Wtedy $R(\omega) = H(\omega)$. Wielomian $H(x) - R(\omega)$ ma stopień mniejszy niż $G(x)$, ma współczynniki wymierne i ω jest jego pierwiastkiem, więc musi być wielomianem zerowym. Czyli $H(x)$ jest stały, a ponieważ ma współczynniki całkowite, to $R(\omega) = H(\omega)$ jest liczbą całkowitą.

Uwaga: Rozwiązanie można skończyć alternatywnie. Mamy równość

$$\prod_{k=1}^{r-1} (\omega^k - 1)^n - \prod_{k=1}^{r-1} ((\omega^k)^n - 1) = nS(\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{r-1}),$$

przy czym S jest wielomianem symetrycznym $r-1$ zmiennych. Z podstawowego twierdzenia o wielomianach symetrycznych wynika, że $S(\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{r-1})$ można zapisać jako wartość wielomianu o współczynnikach całkowitych dla $r-1$ argumentów

$$\sum_{k=1}^{r-1} \omega^k, \quad \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant r-1} \omega^{k_1}\omega^{k_2}, \quad \ldots \quad , \omega^1\omega^2 \ldots \omega^{r-1},$$

które, jako współczynniki wielomianu $F(x)$ przemnożone przez ± 1, są całkowite. To kończy dowód.

Uwaga: jeżeli n jest liczbą pierwszą, wielomian $(x-1)^n - (x^n - 1)$ ma wszystkie współczynniki podzielne przez n. Istnieją również liczby n, r, gdzie n jest liczbą złożoną, spełniające założenia zadania, np. $n = 341 = 11 \cdot 31$, $r = 2$. Wielomian $(x-1)^{341} - (x^{341} - 1)$ daje resztę $\left(\sum_{2k \leqslant 341} \binom{341}{2k} - 1\right)(x+1) = (2^{340} - 1)(x+1)$ z dzielenia przez $x^2 - 1$. Ponieważ $341 \cdot 3 = 2^{10} - 1$, to $341 \mid 2^{340} - 1$.

Więcej o teście pierwszości AKS można przeczytać w pracy „PRIMES is in P", której autorami są M.Agrawal, N.Kayal, N.Saxena.

Pierwszy Mecz Matematyczny

1. Orzec, czy istnieją takie dwa nieskończone podzbiory liczb całkowitych X i Y, że każdą liczbę całkowitą można jednoznacznie przedstawić jako $x+y$, gdzie $x \in X$ i $y \in Y$.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że istnieją zbiory spełniające warunki zadania. Dla dwóch zbiorów $A, B \subseteq \mathbb{Z}$ definiujemy $A+B=\{a+b \mid a \in A, b \in B\}$. Ponadto powiemy, że para (A,B) podzbiorów liczb całkowitych jest *wyjątkowa*, jeżeli każdą liczbę $c \in A+B$ można jednoznacznie przedstawić jako $a+b$, gdzie $a \in A$ i $b \in B$. Będziemy konstruować indukcyjnie skończone zbiory $X_0,\ X_1,\ X_2,\ \ldots$ oraz $Y_0,\ Y_1,\ Y_2,\ \ldots$ w taki sposób, aby dla każdego $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ spełnione były warunki:

(a) $S_n \subseteq X_n+Y_n$, gdzie $S_{2k}=\{-k,-k+1,\ldots,k-1,k\}$ i $S_{2k+1}=\{-k,-k+1,\ldots,k-1,k,k+1\}$,

(b) para zbiorów (X_n,Y_n) jest wyjątkowa,

(c) $X_n \subseteq X_{n+1}$ oraz $Y_n \subseteq Y_{n+1}$,

(d) $|X_n|<|X_{n+1}|$ oraz $|Y_n|<|Y_{n+1}|$.

Na początku zobaczmy, jak z tak skonstruowanego ciągu zbiorów otrzymać szukane dwa zbiory X i Y. Definiujemy $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ oraz $Y=\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$. Z własności (d) wynika, że zbiory X i Y są nieskończone. Weźmy liczbę całkowitą m. Ponieważ $m \in S_{|2m|}$, to z własności (a) liczbę m można przedstawić jako $x+y$, gdzie $x \in X_{|2m|} \subseteq X$ i $y \in Y_{|2m|} \subseteq Y$. Przypuśćmy teraz, że $m=x+y=x'+y'$, gdzie $x,x' \in X$, $y,y' \in Y$. Z definicji zbiorów X i Y wynika, że istnieją indeksy i,i',j,j' takie, że $x \in X_i$, $x' \in X_{i'}$, $y \in Y_j$ oraz $y' \in Y_{j'}$. Niech $k=\max(i,i',j,j')$. Wtedy z własności (c) otrzymujemy $x,x' \in X_k$ oraz $y,y' \in Y_k$. Ponieważ $x+y=x'+y'$, zaś para zbiorów (X_k,Y_k) jest wyjątkowa, to musi zachodzić $x=x'$ i $y=y'$, co dowodzi, że para zbiorów (X,Y) też jest wyjątkowa.

Pozostaje skonstruować ciągi skończonych zbiorów (X_n) i (Y_n) spełniające warunki (a)–(d). Określamy $X_0=\{-1\}$ i $Y_0=\{1\}$. Załóżmy, że skonstruowaliśmy zbiory X_n i Y_n spełniające powyższe warunki. Bez straty ogólności niech $n=2k$ będzie liczbą parzystą (dowód dla nieparzystych n przebiega analogicznie). Niech m będzie najmniejszą liczbą dodatnią, która nie występuje w X_n+Y_n. Z własności (a) zbiorów X_n i Y_n wynika, że $m \geqslant k+1$. Będziemy chcieli zdefiniować $X_{n+1}=X_n \cup \{x\}$ i $Y_{n+1}=Y_n \cup \{y\}$ dla pewnych $x \notin X_n$ i $y \notin Y_n$ takich, że $x+y=m$. Tak określone zbiory spełniają warunki (a), (c) i (d). Zauważmy, że par (x,y) spełniających $x \notin X_n$, $y \notin Y_n$ oraz $x+y=m$ jest nieskończenie wiele. Oznaczmy ten zbiór par przez Z. Aby para (X_{n+1},Y_{n+1}) nie spełniała warunku (b) musi zachodzić jeden z warunków: $x+y_1=x_1+y$, $x+y_1=x_2+y_2$, $x_1+y=x_2+y_2$, gdzie $x_i \in X_n$, $y_j \in Y_n$. Ponieważ zbiory X_n i Y_n są skończone, każdy z tych warunków wyklucza tylko skończenie wiele par (x,y) ze zbioru Z. W takim razie istnieją wartości x i y, dla których otrzymane zbiory X_{n+1} i Y_{n+1} spełniają wszystkie warunki (a)–(d), co kończy dowód indukcyjny.

2. Niech $k>1$ będzie ustaloną liczbą całkowitą. Wykazać, że istnieje taka liczba rzeczywista x, że dla każdego całkowitego $1 \leqslant n \leqslant 2021$ zachodzi

$$\{x^n\}<\{x^{n-1}\} \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad k \mid n\,,$$

gdzie przez $\{y\}$ oznaczamy część ułamkową liczby y.

Rozwiązanie:

Sposób I

Wykażemy mocniejszą tezę, że dla dowolnej permutacji σ zbioru $\{1,\ldots,2021\}$ istnieje taka liczba x, że $\{x^{\sigma(1)}\}<\{x^{\sigma(2)}\}<\ldots<\{x^{\sigma(2021)}\}$. Żeby zobaczyć, że ta teza rzeczywiście jest mocniejsza, wystarczy rozważyć permutację, w której wszystkie liczby podzielne przez k występują przed wszystkimi niepodzielnymi przez k.

Zanim przystąpimy do właściwego dowodu, wykażemy bardzo prosty fakt:

Fakt. *Jeśli* $0 < x < y$ *oraz* $c > 0$*, to* $\sqrt[k]{x+c} - \sqrt[k]{x} > \sqrt[k]{y+c} - \sqrt[k]{y}$.

Dowód. Korzystając ze wzoru $a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + \ldots + b^{k-1}$ mamy

$$\sqrt[k]{x+c} - \sqrt[k]{x} = \frac{1}{(x+c)^{\frac{k-1}{k}} + \ldots + x^{\frac{k-1}{k}}} > \frac{1}{(y+c)^{\frac{k-1}{k}} + \ldots + y^{\frac{k-1}{k}}} = \sqrt[k]{y+c} - \sqrt[k]{y}.$$

□

Wróćmy do dowodu właściwej tezy. Wybierzmy odpowiednio dużą liczbę całkowitą dodatnią M (to, jak dużą, będzie wynikało z dalszej części rozwiązania). Przez τ oznaczmy permutację odwrotną do σ, to znaczy taką, że dla $i = 1, 2, \ldots, 2021$ zachodzi $\tau(\sigma(i)) = i = \sigma(\tau(i))$. Skonstruujemy liczby rzeczywiste a_k, b_k dla $k = 1, 2, \ldots, 2022$ o następujących własnościach:

1. $M = a_1 < a_2 < \ldots < a_{2022} < b_{2022} < b_{2021} < \ldots < b_1 = M + 3$,
2. Dla $k = 1, 2, \ldots, 2021$ i dla każdego $x \in (a_{k+1}, b_{k+1})$ zachodzi $\frac{\tau(k)-1}{2021} < \{x^k\} < \frac{\tau(k)}{2021}$,
3. Dla każdego k zachodzi $b_k - a_k > 2\left(\sqrt[k]{M^k+1} - M\right)$.

Dla $k = 1$ oczywiście wszystkie warunki są spełnione. Przypuśćmy, że dla $k < 2022$ wybraliśmy już liczby $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k$ zgodnie z powyższymi warunkami. Zauważmy, że warunku 3, nierówności $a_k \geqslant M$ i powyższego faktu wynika, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia m, że $a_k < \sqrt[k]{m} < \sqrt[k]{m+1} < b_k$. Istotnie, różnica między pierwiastkami k-tego stopnia liczb całkowitych nie mniejszych od M jest mniejsza niż połowa długości przedziału (a_k, b_k), więc muszą w nim wystąpić co najmniej dwie takie liczby. Definiujemy $a_{k+1} = \sqrt[k]{m + \frac{\tau(k)-1}{2021}}$, $b_{k+1} = \sqrt[k]{m + \frac{\tau(k)}{2021}}$. Warunki 1 i 2 są spełnione w oczywisty sposób, trzeba sprawdzić warunek 3.

Korzystając z powyższego faktu i przytoczonego w jego dowodzie wzoru, dla odpowiednio dużego M otrzymujemy nierówność

$$b_{k+1} - a_{k+1} > M + 3 - \sqrt[k]{(M+3)^k - \frac{1}{2021}} > \frac{1}{2021k(M+3)^{k-1}} > \frac{2}{(k+1)M^k} > 2\left(\sqrt[k+1]{M^{k+1}+1} - M\right).$$

Widzimy, że warunek, jaki musimy nałożyć na M, aby trzecia z powyższych nierówności była spełniona, to $M > \frac{4042k}{k+1} \cdot \left(\frac{M+3}{M}\right)^{k-1}$. Przy M dążącym do nieskończoności lewa strona dąży do nieskończoności, a prawa do $\frac{4042k}{k+1}$, zatem dla dostatecznie dużych M jest on spełniony. Dla $k = 1, 2, \ldots, 2021$ nakładamy skończenie wiele takich warunków, zatem istnieje M, które spełnia je wszystkie.

Warunki 1 i 2 zapewniają, że dowolny $x \in (a_{2022}, b_{2022})$ spełnia tezę.

Sposób II

Niech $x(m) = m + \frac{1}{P}$, gdzie m jest nieujemną liczbą całkowitą, zaś P jest pewną liczbą pierwszą większą niż 2021. Udowodnimy, że dla dowolnego ciągu liczb całkowitych postaci $1 = a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_l$, gdzie $l \leqslant 2021$ i $0 \leqslant a_i \leqslant P - 1$, istnieje wartość m, dla której $\{x(m)^n\} \in [\frac{a_n}{P}, \frac{a_n+1}{P})$ dla $n = 1, 2, \ldots, l$. Tezę zadania otrzymamy, przyjmując $a_n = n \bmod k$ dla $n = 1, 2, \ldots, 2021$.

Dla $l = 1$ nasza teza oczywiście zachodzi dla dowolnej wartości m. Załóżmy, że teza jest spełniona dla pewnego $l \geqslant 1$. Rozważmy ciąg $0 = a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{l+1}$, gdzie $0 \leqslant a_i \leqslant P - 1$. Weźmy takie całkowite m_0, że $\{x(m_0)^n\} \in [\frac{a_n}{P}, \frac{a_n+1}{P})$ dla $n = 1, 2, \ldots, l$. Niech $m = m_0 + tP^{l-1}$, gdzie t jest liczbą całkowitą z przedziału $[0, P)$. Wtedy dla $n = 1, 2, \ldots, l$ mamy

$$\{x(m)^n\} = \left\{\left(m_0 + tP^{l-1} + \frac{1}{P}\right)^n\right\} = \left\{\left(m_0 + \frac{1}{P}\right)^n\right\} = \{x(m_0)^n\}.$$

Pozostaje tak dobrać wartość t, aby $\{x(m)^{l+1}\} \in [\frac{a_{l+1}}{P}, \frac{a_{l+1}+1}{P})$. Mamy

$$\{x(m)^{l+1}\} = \left\{\left(m_0 + tP^{l-1} + \frac{1}{P}\right)^{l+1}\right\} = \left\{\left(m_0 + \frac{1}{P}\right)^{l+1} + (l+1)\frac{t}{P}\right\}.$$

Ponieważ $l + 1 \leqslant 2021 < P$, to

$$\{(l+1) \cdot 0, (l+1) \cdot 1, \ldots, (l+1) \cdot (P-1)\} \equiv_P \{0, 1, \ldots, P-1\}.$$

Zatem rozważając $t = 0, 1, \ldots, P-1$, wartość $\{x(m)^{l+1}\}$ może należeć do dowolnego przedziału postaci $[\frac{j}{P}, \frac{j+1}{P})$, co kończy dowód.

3. Dane są liczby rzeczywiste $0 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_n \leqslant 1$, gdzie $n \geqslant 2$. Wykazać, że

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{a_j - a_i} \geqslant n^2 \, \frac{\log_2(n/8)}{2}.$$

Rozwiązanie:

Dla $n < 8$ prawa strona nierówności jest ujemna, zaś lewa dodatnia, wobec czego nierówność jest trywialnie spełniona. Załóżmy więc, że $n \geqslant 8$. Rozważmy zbiór par indeksów $A_h = \{(i, i+h) \mid 1 \leqslant i \leqslant n-h\}$. Niech

$$S_h = \sum_{(i,j) \in A_h} (a_j - a_i).$$

Możemy oczywiście przepisać S_h jako

$$S_h = \sum_{(i,j) \in A_h} \sum_{k=0}^{h-1} (a_{k+i+1} - a_{k+i}).$$

W sumie po prawej stronie każda z różnic $a_{k+1} - a_k$ pojawia się co najwyżej h razy (gdyż dla co najwyżej h par $(i,j) \in A_h$ zachodzi $i \leqslant k < k+1 \leqslant j$). Z założeń zadania każda z różnic $a_{k+1} - a_k$ jest dodatnia, więc

$$S_h \leqslant h \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = h(a_n - a_1) \leqslant h.$$

Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza mamy

$$\sum_{(i,j) \in A_h} (a_j - a_i) \sum_{(i,j) \in A_h} \frac{1}{a_j - a_i} \geqslant |A_h|^2 = (n-h)^2.$$

W takim razie

$$\sum_{(i,j) \in A_h} \frac{1}{a_j - a_i} \geqslant \frac{(n-h)^2}{S_h} \geqslant \frac{(n-h)^2}{h}.$$

Sumując powyższe nierówności dla $h = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$ otrzymujemy

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{a_j - a_i} \geqslant \sum_{h=1}^{n-1} \frac{(n-h)^2}{h} = n^2 \sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{h} - 2n(n-1) + \sum_{h=1}^{n-1} h = n^2 \sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{h} - \frac{3}{2} n(n-1). \tag{1}$$

Wykażemy teraz następujący lemat.

Lemat. *Dla całkowitego $n \geqslant 3$ zachodzi nierówność*

$$\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{k} \geqslant 1 + \frac{\log_2 n}{2}\,.$$

Dowód. Udowodnimy tezę przez indukcję matematyczną. Dla $n = 1$ jest ona trywialnie spełniona. Załóżmy teraz, że dla pewnego n istotnie mamy

$$\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{k} \geqslant 1 + \frac{\log_2 n}{2}\,.$$

Wykażemy, że

$$\sum_{i=k}^{n+1} \frac{1}{k} \geqslant 1 + \frac{\log_2 (n+1)}{2}\,.$$

Wystarczy wykazać, że

$$\sum_{i=k}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \left(1 + \frac{\log_2 (n+1)}{2}\right) - \left(1 + \frac{\log_2 n}{2}\right)\,,$$

$$\frac{1}{n+1} \geqslant \frac{1}{2}(\log_2 (n+1) - \log_2 n) = \frac{1}{2} \log_2 \frac{n+1}{n}\,.$$

Wystarczy więc wykazać, że

$$2^{\frac{2}{n+1}} \geqslant 1 + \frac{1}{n}\,,$$

$$4 \geqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\,,$$

co jest prawdą na mocy Lematu 2 zadania 1 z zawodów drużynowych i nierówności $1 + \frac{1}{n} \leqslant \frac{4}{3}$. □

Korzystając z tego lematu i nierówności (1), otrzymujemy

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{a_j - a_i} > n^2 \left(1 + \frac{\log_2 (n-1)}{2} - \frac{3}{2}\right) = n^2\, \frac{\log_2 \frac{n-1}{2}}{2} > n^2\, \frac{\log_2 (n/8)}{2}\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

4. Dany jest graf z wyróżnionym wierzchołkiem. Dla dodatnich liczb całkowitych a, b, niech $s(a, b)$ oznacza liczbę tych podzbiorów A zbioru wierzchołków tego grafu, które spełniają następujące warunki:

- A zawiera wyróżniony wierzchołek,
- $|A| = a$,
- podgraf złożony z wierzchołków ze zbioru A jest spójny,
- wierzchołków spoza A, które sąsiadują z pewnym wierzchołkiem z A jest dokładnie b.

Udowodnić, że $s(a, b) \leqslant \binom{a+b-1}{b}$.

Rozwiązanie:

Powiemy, że podzbiór wierzchołków grafu jest (a, b)-dobry, jeśli spełnia warunki z treści zadania.

Niech $\mathcal{U}_G(a,b)$ będzie rodziną wszystkich (a,b)-dobrych podzbiorów w G. Przedstawimy dwa rozwiązania tego zadania.

Sposób I

Tezę będziemy dowodzić indukcyjnie po $a+b$. Jeżeli $a=1$ lub $b=0$, to teza w oczywisty sposób jest spełniona (jako szukany podzbiór A możemy wziąć co najwyżej jeden zbiór). Załóżmy teraz, że $a \geqslant 2$ i $b \geqslant 1$. Oznaczmy dany graf przez G i niech v będzie wyróżnionym wierzchołkiem w G. Jeżeli v jest wierzchołkiem izolowanym (tj. nie ma sąsiadów w G), to teza trywialnie zachodzi. Przyjmijmy teraz, że u jest jednym z sąsiadów v.

Rozważmy graf G_1 powstały przez zastąpienie w G wierzchołków v i u jednym wierzchołkiem w, którego sąsiedztwo jest sumą mnogościową sąsiedztwa v i u w G. Zauważmy, że każdy podzbiór (a,b)-dobry w G, który zawiera u, odpowiada jednemu podzbiorowi $(a-1,b)$-dobremu w G_1 (z wyróżnionym wierzchołkiem w).

Niech G_2 będzie grafem powstałym przez wyrzucenie wierzchołka u z G. Wtedy każdy podzbiór (a,b)-dobry w G, który nie zawiera u, odpowiada jednemu podzbiorowi $(a,b-1)$-dobremu w G_2 (z wyróżnionym wierzchołkiem v).

Łącząc dwa powyższe fakty i korzystając z założenia indukcyjnego, otrzymujemy

$$\begin{aligned} s(a,b) = |\mathcal{U}_G(a,b)| &= |\mathcal{U}_{G_1}(a-1,b)| + |\mathcal{U}_{G_2}(a,b-1)| \\ &\leqslant \binom{(a-1)+b-1}{b} + \binom{a+(b-1)-1}{b-1} = \binom{a+b-1}{b}, \end{aligned}$$

co należało wykazać.

Sposób II

Niech v będzie wyróżnionym wierzchołkiem w danym grafie G. Rozważmy losową permutację wierzchołków, w której wierzchołek v znajduje się na pierwszym miejscu.

Dla danego zbioru (a,b)-dobrego A niech X_A będzie zdarzeniem polegającym na tym, że każdy wierzchołek z A występuje przed każdym wierzchołkiem z $N(A)$, gdzie $N(A)$ oznacza sąsiedztwo zbioru A ($|N(A)|=b$). Widzimy, że zdarzenie X_A zależy tylko od względnej kolejności wierzchołków z $A \setminus \{v\}$ i z $N(A)$, skąd prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia X_A jest równe

$$\frac{(a-1)!\; b!}{(a-1+b)!} = \binom{a+b-1}{b}^{-1}.$$

Zauważmy, że zdarzenia X_A są parami rozłączne. Istotnie, przypuśćmy, że dla ustalonej permutacji σ istnieją dwa różne (a,b)-dobre podzbiory A i A' takie, że zdarzenia X_A i $X_{A'}$ zachodzą dla σ. Ponieważ zbiory A i A' są spójne w G i zawierają po a wierzchołków, istnieją takie dwa wierzchołki x i y, że $x \in N(A) \cap A'$ i $y \in N(A') \cap A$. Bez straty ogólności załóżmy, że x występuje przed y w permutacji σ. To jednak prowadzi do sprzeczności z założeniem, że zdarzenie X_A zachodzi dla σ.

Skoro dla żadnej permutacji nie zachodzą dwa różne zdarzenia X_A, prawdopodobieństwo, że zajdzie przynajmniej jedno z nich jest równe

$$\sum_{A \,\in\, \mathcal{U}_G(a,b)} \binom{a+b-1}{b}^{-1} \leqslant 1.$$

Stąd otrzymujemy

$$|\mathcal{U}_G(a,b)| \leqslant \binom{a+b-1}{b},$$

co kończy dowód.

5. Danych jest n smerfów uwięzionych przez Gargamela oraz $2n-1$ czapek $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{2n-1}$. Gargamel zakłada każdemu smerfowi jedną z czapek. Każdy smerf widzi, jakie czapki są na głowach pozostałych

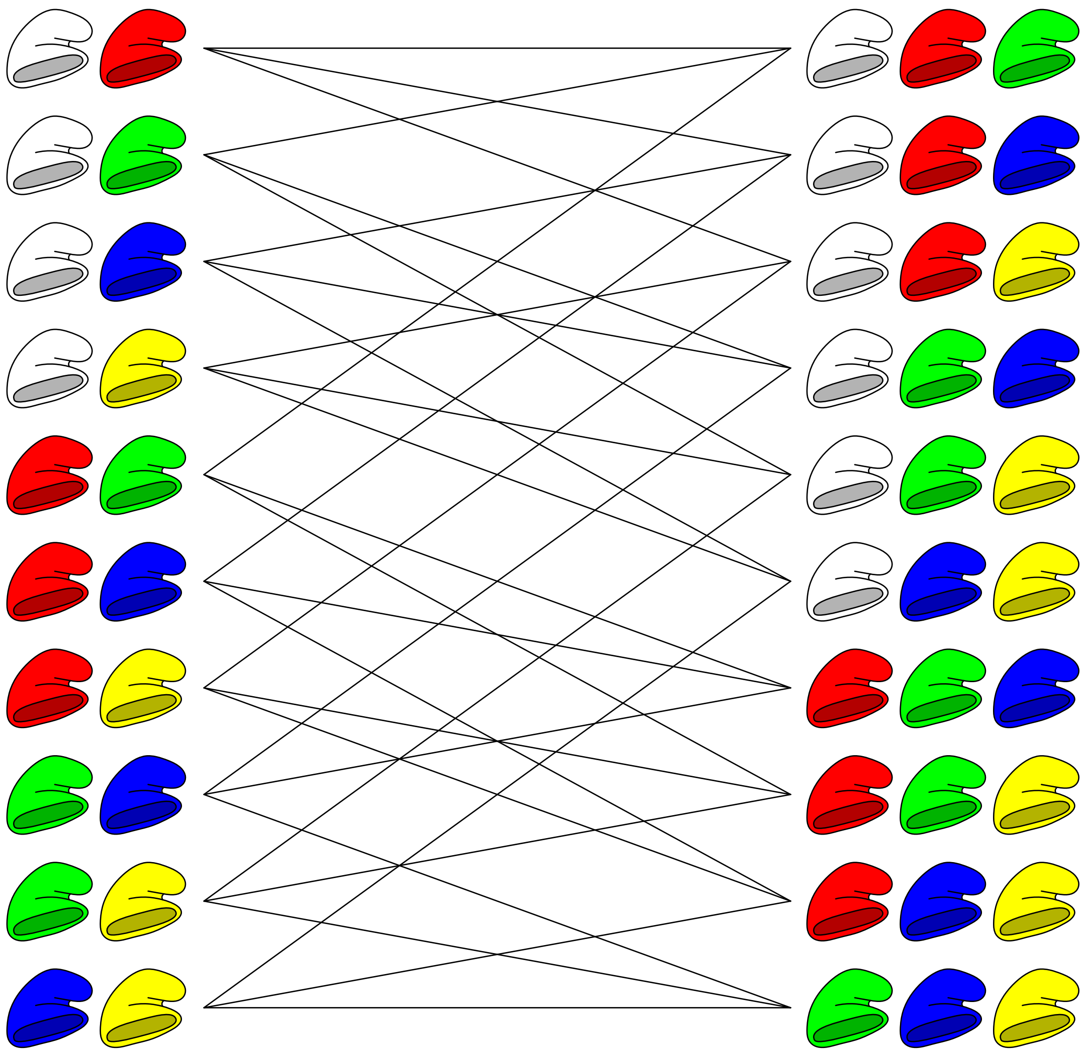
$n-1$ smerfów, ale nie widzi, którą czapkę założył na jego głowę Gargamel. Następnie Gargamel pyta każdego smerfa, którą czapkę ma na głowie. Jeśli co najmniej jeden smerf odpowie poprawnie, to wszystkie smerfy zostaną wypuszczone; w przeciwnym razie pozostaną zamknięte w zamku Gargamela. Smerfy mogą ustalić strategię wcześniej, jednak po założeniu czapeczek nie mogą się komunikować (nie słyszą też odpowiedzi innych smerfów). Czy istnieje strategia gwarantująca smerfom wyjście na wolność?

Rozwiązanie:

Niech V_1 będzie zbiorem wszystkich $(n-1)$-elementowych podzbiorów zbioru $\{c_1, c_2, \ldots, c_{2n-1}\}$, a V_2 zbiorem wszystkich n-elementowych podzbiorów zbioru $\{c_1, c_2, \ldots, c_{2n-1}\}$. Rozważmy graf dwudzielny G, którego zbiorem wierzchołków jest $V = V_1 \cup V_2$, a zbiorem krawędzi

$$E = \{(A, B) \colon A \in V_1,\ B \in V_2,\ A \subset B\}.$$

Rysunek przedstawia graf G dla $n = 3$.



Każdy z wierzchołków $A \in V_1$ jest połączony krawędzią z n wierzchołkami w V_2: są nimi zbiory postaci $A \cup \{c_i\}$, gdzie $c_i \notin A$. Podobnie, każdy wierzchołek $B \in V_2$ jest połączony krawędzią z n wierzchołkami w V_1: tymi wierzchołkami są $B \setminus \{c_i\}$, gdzie $c_i \in B$.

Wykażemy najpierw, że w grafie G istnieje *skojarzenie doskonałe*, tj. taki zbiór krawędzi M, że każdy wierzchołek G jest incydentny z dokładnie jedną krawędzią w M. Posłużymy się w tym celu twierdzeniem Halla.

Twierdzenie (Hall). *Dany jest graf G, którego wierzchołki można podzielić na dwa rozłączne i równoliczne zbiory A i B, tak, że każda krawędź ma jeden koniec w A, zaś drugi w B. Ponadto dla dowolnego* *podzbioru $A' \subset A$ zbiór B' wszystkich wierzchołków sąsiadujących z jakimś wierzchołkiem z A' jest wielkości co najmniej $|A'|$. Wtedy w grafie G istnieje skojarzenie doskonałe.*

Żeby skorzystać z twierdzenia Halla, musimy sprawdzić jego założenia. Oczywiście

$$|V_1| = \binom{2n-1}{n-1} = \binom{2n-1}{n} = |V_2|\,.$$

Rozważmy dowolny $V_1' \subset V_1$ o k elementach. Każdy wierzchołek w V_1 ma stopień n, więc wszystkich krawędzi o jednym końcu w V_1' jest dokładnie kn. Załóżmy, że zbiór V_2' wszystkich krawędzi z V_2 sąsiadujących z pewnym wierzchołkiem z V_1' ma co najwyżej k elementów. Oznaczałoby to, że wszystkich krawędzi o jednym końcu w V_1' (a więc z definicji drugim końcu w V_2') jest co najwyżej $(k-1)n$, co stanowi sprzeczność i dowodzi, że założenia twierdzenia Halla są spełnione. W grafie G istnieje zatem skojarzenie doskonałe M.

Opiszemy teraz strategię wygrywającą dla smerfów. Każdy smerf zgaduje kolor swojej czapki w następujący sposób: jeśli czapki pozostałych $n-1$ smerfów tworzą zbiór A, to smerf zgaduje, że ma na głowie czapkę c_i, gdzie krawędź $(A, A \cup \{c_i\})$ należy do skojarzenia M.

Taka strategia zapewnia wolność smerfom. W rzeczy samej, jeśli oznaczymy zbiór czapek na głowach smerfów przez B, to dla pewnego $A \in V_1$ mamy $(A, B) \in M$ i wtedy $B = A \cup \{c_i\}$ dla pewnego i. Wtedy smerf, który ma na głowie czapkę c_i poprawnie odgadnie kolor swojej czapki.

6. Dany jest wielościan wypukły P, którego ściany pomalowano na niebiesko i zielono (każdą ścianę na jeden kolor) w taki sposób, że ścian niebieskich jest więcej niż zielonych, ale żadne dwie niebieskie ściany nie mają wspólnej krawędzi. Udowodnić, że w wielościan P nie da się wpisać sfery.

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, że w wielościan P da się wpisać sferę S. Rozważmy pewną ścianę $F = A_1 A_2 \ldots A_k$ tego wielościanu i niech T będzie punktem styczności pomiędzy sferą S a ścianą F. Zdefiniujmy wyrażenie

$$\sigma(F) = \varepsilon(F) \sum_{i=1}^{k} \sphericalangle A_i T A_{i+1}\,,$$

gdzie przyjmujemy $A_{k+1} = A_1$ oraz określamy $\varepsilon(F) = 1$, jeśli ściana F jest niebieska, i $\varepsilon(F) = -1$, jeśli ściana F jest zielona. Wprost z definicji funkcji σ widzimy, że $\sigma(F) = 360^\circ$, jeśli F jest niebieska, i $\sigma(F) = -360^\circ$, jeśli F jest zielona. W takim razie ponieważ ścian niebieskich jest więcej niż zielonych, wyrażenie

$$f(P) = \sum_{S\text{ – ściana }P} \sigma(S)$$

jest dodatnie. Policzymy teraz to wyrażenie w inny sposób. Rozważmy pewną krawędź AB tego wielościanu. Niech F_1 i F_2 będą dwoma ścianami P o wspólnej krawędzi AB i niech T_i będzie punktem styczności sfery S i ściany F_i dla $i = 1, 2$. Definiujemy wyrażenie:

$$\tau(AB) = \varepsilon(F_1) \cdot \sphericalangle AT_1B + \varepsilon(F_2) \cdot \sphericalangle AT_2B\,.$$

Z treści zadania wiemy, że co najwyżej jedna ze ścian F_1 i F_2 jest niebieska, a ponadto $\triangle AT_1B \equiv \triangle AT_2B$, więc $\tau(AB) \leqslant 0$ dla dowolnej krawędzi AB. Ponadto widzimy, że możemy zapisać

$$f(P) = \sum_{S\text{ – ściana }P} \sigma(S) = \sum_{e\text{ – krawędź }P} \tau(e)\,,$$

skąd $f(P) \leqslant 0$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód tezy zadania.

Uwaga 1: Istnieją wielościany, które spełniają warunki zadania. Podamy przykładową konstrukcję takich brył. Niech P_0 będzie wielościanem wypukłym, który ma n wierzchołków i f ścian, przy czym

$n > f$ (jako P_0 możemy wziąć np. sześcian). Rozważmy wielościan P powstały przez *obcięcie* każdego narożnika P_0 za pomocą płaszczyzn przechodzących blisko wierzchołków P_0. Otrzymany wielościan P spełnia warunki zadania, ponieważ każdą ścianę P będącą obciętym narożnikiem P_0 możemy pokolorować na kolor niebieski, a pozostałe ściany na kolor zielony. Wtedy ścian niebieskich jest n, zaś ścian zielonych jest $f < n$, a ponadto żadne dwie ściany niebieskie nie mają wspólnej krawędzi.

Uwaga 2: Prawdziwe jest również zdanie dualne do przedstawionego w treści zadania:

Dany jest wielościan wypukły P, którego wierzchołki pomalowano na niebiesko i zielono w taki sposób, że wierzchołków niebieskich jest więcej niż zielonych, ale żadne dwa wierzchołki niebieskie nie są połączone krawędzią. Wtedy na wielościanie P nie da się opisać sfery.

7. Dany jest trójkąt równoramienny ABC ($AB = AC$), w którym punkt I jest środkiem okręgu wpisanego. Niech ω będzie okręgiem przechodzącym przez C i stycznym do prostej AI w punkcie I. Oznaczmy przez Q i D punkty przecięcia okręgu ω odpowiednio z prostą AC i okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Niech M, N będą środkami odcinków odpowiednio AB oraz CQ. Dowieść, że proste AD, MN i BC przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:

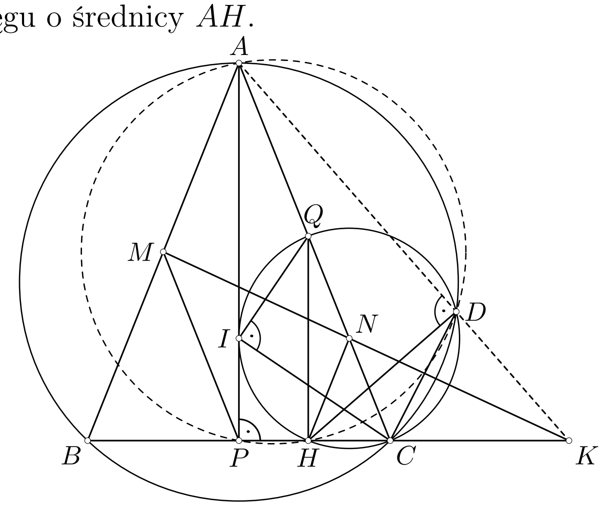
Niech P będzie środkiem boku BC. Zauważmy, że

$$\sphericalangle IQC = \sphericalangle PIC = 90^\circ - \sphericalangle PCI = 90^\circ - \sphericalangle QCI,$$

więc $\sphericalangle QIC = 90^\circ$ i w konsekwencji N jest środkiem ω. Niech ω przecina BC po raz drugi w punkcie H. Wtedy $\sphericalangle HDC = \sphericalangle HQC = 90^\circ - \sphericalangle ACB$. Wobec tego

$$\sphericalangle ADH = \sphericalangle ADC - \sphericalangle HDC = (180^\circ - \sphericalangle ACB) - (90^\circ - \sphericalangle ACB) = 90^\circ,$$

więc A, D, H, P leżą na okręgu o średnicy AH.



Zauważmy, że $NC \parallel MP$ oraz

$$\sphericalangle HNC = 2\sphericalangle HQC = 180^\circ - 2\sphericalangle ACB = \sphericalangle BAC\,,$$

więc także $NH \parallel MB$. Niech K będzie punktem przecięcia prostych BC i MN. Wobec tego

$$\frac{KC}{KP} = \frac{KN}{KM} = \frac{KH}{KB},$$

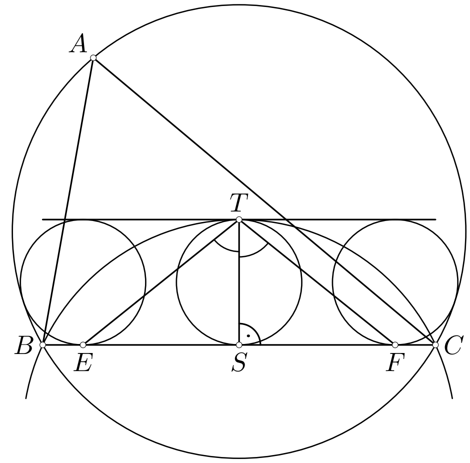
zatem $KC \cdot KB = KH \cdot KP$. Stąd K leży na osi potęgowej okręgu opisanego na trójkącie ABC oraz okręgu przechodzącego przez A, D, H, P, czyli K leży na prostej AD, co należało dowieść.

8. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o. Okręgi o_1 i o_2 są styczne do boku BC odpowiednio w punktach E i F, a ponadto wewnętrznie do o oraz leżą po tej samej stronie BC, co punkt A. Niech k

oznacza wspólną styczną zewnętrzną do o_1 i o_2, różną od BC. Okrąg ω przechodzący przez B i C jest styczny do k w punkcie T. Okrąg ω' jest styczny do k w T oraz do BC w S. Wykazać, że prosta TS jest dwusieczną ETF.

Rozwiązanie:

Najpierw załóżmy, że k jest równoległa do BC. Wtedy proste BC, k oraz okrąg o są symetryczne względem symetralnej BC, więc okręgi o_1 i o_2 również są symetryczne względem symetralnej BC. W takim razie $BE = CF$. Widzimy, że $TS \perp BC$ oraz $BT = CT$, więc z symetrii $ET = FT$ i teza zachodzi.

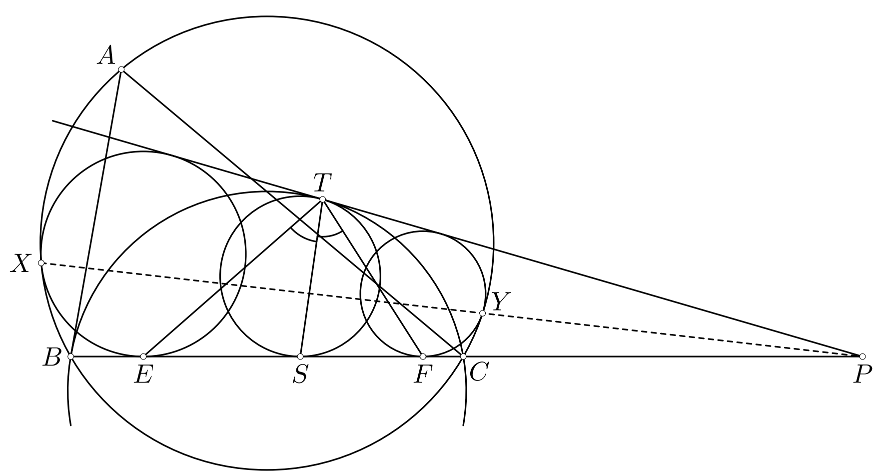


Jeżeli $k \nparallel BC$, to niech P będzie punktem przecięcia prostych BC i k, X i Y punktami styczności okręgu o i odpowiednio okręgów o_1 oraz o_2. Punkty P, X, Y są środkami jednokładności przeprowadzającymi odpowiednio o_1 na o_2, o na o_1 oraz o_2 na o, więc są współliniowe. Inwersja o środku w P przeprowadzająca o_1 na o_2 przeprowadza X na Y oraz E na F, stąd i z potęgi punktu P względem o i ω otrzymujemy

$$PE \cdot PF = PX \cdot PY = PB \cdot PA = PT^2.$$

Stąd wynika podobieństwo trójkątów PTE i PFT. Ponadto $PT = PS$, zatem

$$\sphericalangle ETS = \sphericalangle PST - \sphericalangle PET = \sphericalangle STP - \sphericalangle FTP = \sphericalangle STF.$$



9. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym wysokości AD i BE przecinają się w punkcie H. Niech M będzie środkiem odcinka AB. Okręgi opisane na trójkątach DEM oraz ABH przecinają się w punktach P i Q, przy czym P leży po tej samej stronie CH, co punkt A. Udowodnić, że proste ED, PH, MQ oraz okrąg opisany na trójkącie ABC mają punkt wspólny.

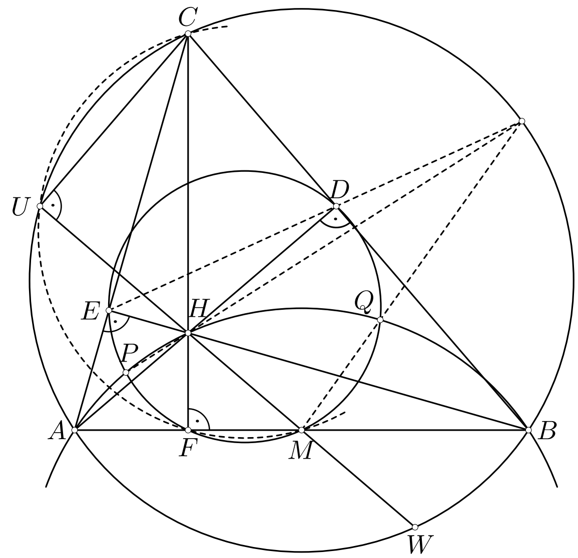
Rozwiązanie:

Oznaczmy przez Ω okrąg opisany na trójkącie ABC. Rozważmy inwersję o środku w punkcie M i promieniu AM. Ponieważ $\sphericalangle ADB = \sphericalangle AEB = 90^\circ$, to $AM = DM = EM = BM$, więc punkty A, D, E, B zachowują się w tej inwersji. Stąd okrąg DEM przechodzi na prostą DE.

Niech prosta HM przecina okrąg Ω w punktach U i W, przy czym $U,\ H,\ M,\ W$ leżą w tej kolejności. Znanym faktem jest, iż odbicie H względem M leży na okręgu Ω, stąd to odbicie musi być punktem W. Stąd

$$MH \cdot MU = MW \cdot MU = MA \cdot MB = MA^2,$$

więc w rozważanej inwersji H przechodzi na U. Stąd okrąg ABH przechodzi na okrąg Ω. Zatem obraz punktu Q leży na prostej DE i okręgu Ω, stąd proste DE i MQ przecinają się na okręgu opisanym na trójkącie ABC.



Następnie rozważmy inwersję o środku w H i promieniu $\sqrt{HA \cdot HD}$ złożoną z symetrią środkową względem H. W tym przekształceniu A zamienia się z D, B z E, stąd okrąg ABH przechodzi na prostą DE.

Znanym faktem jest, iż CW jest średnicą okręgu Ω, stąd $\sphericalangle MUC = \sphericalangle WUC = 90^\circ = \sphericalangle MFA$, gdzie F jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C. Zatem punkty M, F, U, C leżą na jednym okręgu i $HM \cdot HU = HF \cdot HC$, czyli w rozważanym przekształceniu M przechodzi na U i w konsekwencji okrąg DEM przechodzi na okrąg Ω.

W takim razie punkt P przechodzi na punkt przecięcia prostej DE i okręgu Ω, czyli również prosta PH przechodzi przez ten punkt przecięcia.

10. Niech $n > 1$ będzie liczbą całkowitą i $T_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$. Przypuśćmy, że dla dowolnej nieujemnej liczby rzeczywistej t zachodzi równość $T_n\left(t + \frac{1}{t}\right) = t^n + \frac{1}{t^n}$. Udowodnić, że T_n ma współczynniki całkowite oraz dla każdego $i = 0, 1, \ldots, n-1$ zachodzi $\mathrm{NWD}(n, a_i) > 1$.

Rozwiązanie:

Z nietrudnej tożsamości $t^n + \frac{1}{t^n} = \left(t^{n-1} + \frac{1}{t^{n-1}}\right)\left(t + \frac{1}{t}\right) - \left(t^{n-2} + \frac{1}{t^{n-2}}\right)$ zachodzącej dla $n \geqslant 2$ wynika, że wielomiany T_n są opisane wzorem rekurencyjnym $T_0(x) = 2$, $T_1(x) = x$, $T_n(x) = xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ dla $n \geqslant 2$. Z tego wzoru oraz ze wzorów na T_0 i T_1 indukcyjnie wykazujemy, że jeśli $2 \nmid n - k$ to $a_k = 0$, stąd dla takich k teza jest trywialnie spełniona. Niech $a_{n,k}$ będzie współczynnikiem przy x^k wielomianu T_n dla $0 \leqslant k \leqslant n$ oraz niech $b_{n,k} = a_{n,n-2k}$ dla $0 \leqslant 2k \leqslant n$. Naszym celem jest wyznaczenie wartości kończy dowód.

Jest jasne, że $b_{0,0} = 2$ i $b_{n,0} = 1$ dla $n > 0$. Analizując we wzorze rekurencyjnym na T_n współczynnik przy x^l, otrzymujemy, że $a_{n,l} = a_{n-1,l-1} - a_{n-2,l}$, więc $b_{n,k} = b_{n-1,k} - b_{n-2,k-1}$. Wykażemy, że dla $(n,k) \neq (0,0)$ zachodzi równość

$$b_{n,k} = (-1)^k \left(\binom{n-k+1}{k} - \binom{n-k-1}{k-2}\right).$$

Najpierw sprawdzimy, że spełnione są warunki początkowe. Dla $k = 0$ i $n > 0$ otrzymujemy $b_{n,0} = 1 = \binom{n+1}{0} - \binom{n-1}{-2}$ (stosujemy konwencję $\binom{m}{l} = 0$ dla $l < 0$). Dla $k > 0$ i $n = 2k$ mamy $(-1)^k \left(\binom{k+1}{k} - \binom{k-1}{k-2}\right) = 2 \cdot (-1)^k$. Z drugiej strony równość $b_{2k,k} = 2 \cdot (-1)^k$ otrzymujemy wstawiając $T_n(0)$ do rekurencji definiującej wielomiany T_n.

To, że tak zdefiniowane $b_{n,k}$ spełniają oczekiwaną rekurencję, wynika z rachunku

$$(-1)^k \left(\binom{n-k+1}{k} - \binom{n-k-1}{k-2}\right) =$$

$$= (-1)^k \left(\binom{n-k}{k} + \binom{n-k}{k-1} - \binom{n-k-2}{k-2} - \binom{n-k-2}{k-3}\right) =$$

$$= (-1)^k \left(\binom{(n-1)-k+1}{k} - \binom{(n-1)-k-1}{k-2}\right) -$$

$$-(-1)^{k-1} \left(\binom{(n-2)-(k-1)+1}{k-1} - \binom{(n-2)-(k-1)-1}{(k-1)-2}\right).$$

Teza dla warunków początkowych oraz $k = 1$ jest oczywista. Przyjmijmy, że $n > 2k > 2$. Wówczas

$$(n-2k)\left(\binom{n-k+1}{k} - \binom{n-k-1}{k-2}\right) = \frac{n-2k}{(n-2k+1)!}\left(\frac{(n-k+1)!}{k!} - \frac{(n-k-1)!}{(k-2)!}\right) =$$

$$= \frac{(n-2k)(n-k-1)!}{k!(n-2k+1)!}\left((n-k)(n-k+1) - k(k-1)\right) = \frac{(n-2k)(n-k-1)!}{k!(n-2k+1)!} n(n-2k+1) =$$

$$= n\binom{n-k-1}{k}.$$

Widzimy, że liczba $(n-2k)\left(\binom{n-k+1}{k} - \binom{n-k-1}{k-2}\right)$ jest podzielna przez n, przy czym pierwszy czynnik nie może być podzielny przez n, więc drugi nie może być względnie pierwszy z n, co kończy dowód.

11. Niech $\mathbb{N}$ oznacza zbiór dodatnich liczb całkowitych. Dana jest funkcja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, przy czym dla dowolnych względnie pierwszych $m,\ n \in \mathbb{N}$ liczby $f(n)$ i $f(m)$ są względnie pierwsze, a ponadto $n \leqslant f(n) \leqslant n + 2021$. Udowodnić, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i liczby pierwszej p, jeżeli $p \mid f(n)$, to $p \mid n$.

Rozwiązanie:

Niech $P(n)$ będzie zbiorem wszystkich liczb pierwszych, które dzielą przynajmniej jedną z liczb $f(n)$, $f(n^2)$, $f(n^3)$, ... Zbiór ten jest oczywiście niepusty dla $n > 1$, gdyż wtedy $f(n) > 1$. Ustalmy liczbę pierwszą p. Wykażemy najpierw, że $P(p)$ jest skończony. Załóżmy przeciwnie. Niech $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_{2022}$ będą różnymi elementami $P(p)$ różnymi też od p. Na mocy chińskiego twierdzenia o resztach możemy wybrać takie n, że

$$\begin{aligned} n &\equiv 0 \pmod{q_1} \\ n+1 &\equiv 0 \pmod{q_2} \\ &\vdots \\ n+2021 &\equiv 0 \pmod{q_{2022}} \\ n &\equiv 1 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Skoro n nie jest podzielne przez p, to jest względnie pierwsze ze wszystkimi liczbami postaci $p,\ p^2,\ \ldots$. Jednakże $n \leqslant f(n) \leqslant n + 2021$, wobec czego $f(n)$ jest podzielne przez przynajmniej jedną z liczb $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_{2022}$, więc nie jest względnie pierwsze z pewnym $f(p^k)$, co przeczy założeniom zadania. Zatem $P(p)$ jest skończony – niech $P(p) = \{q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_k\}$.

Wykażemy, że $P(p)$ zawiera liczbę pierwszą nie większą niż $\max(2022,\ p)$.

Załóżmy przeciwnie, tj. $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_k > \max(2022,\ p)$. Niech $N = (q_1 - 1)(q_2 - 1)\ldots(q_k - 1)$. Z małego twierdzenia Fermata wynika, że liczba $p^N - 1$ jest podzielna przez $q_1 q_2 \ldots q_k$. Wobec tego, skoro $f(p^N) \in [p^N,\ p^N + 2021]$, to $f(p^N)$ nie jest podzielna przez żadną z liczb $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_k$ co przeczy definicji $P(p)$.

Niech $p_1 < p_2 < \cdots$ będą wszystkimi liczbami pierwszymi i niech p_m będzie największą liczbą pierwszą nie większą niż 2022. Z założeń zadania wynika, że zbiory $P(p_i)$ i $P(p_j)$ są rozłączne dla $i \neq j$. Zauważmy, że zbiór każdy ze zbiorów $P(p_1),\ P(p_2),\ \ldots,\ P(p_m)$ zawiera przynajmniej jedną liczbą pierwszą nie większą niż 2022. Liczb takich jest dokładnie m – wobec tego każdy ze zbiorów $P(p_1), P(p_2), \ldots, P(p_m)$ zawiera dokładnie jedną liczbę pierwszą nie większą niż 2022 i każda liczba pierwsza nie większa niż 2022 jest zawarta w którymś $P(p_i)$ dla $1 \leqslant i \leqslant m$. W takim razie jedyną liczbą pierwszą nie większą $\max(2022,\ p)$, która może należeć do $P(p_{m+1})$ jest p_{m+1}. Podobnie wykazujemy, że $p_{m+2} \in P(p_{m+2})$ i rozumując indukcyjnie, $p_{m+k} \in P(p_{m+k})$. Oznacza to też, że zbiory $P(p_{m+k})$ są jednoelementowe. W takim razie

$$P(p_1) \cup P(p_2) \cup \ldots \cup P(p_m) \subset \{p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_m\}\,,$$

więc każdy ze zbiorów także musi być jednoelementowy (bo zbiory te są niepuste i rozłączne). W takim razie każdy ze zbiorów $P(p)$ dla pierwszego p jest jednoelementowy, czyli dla dowolnego pierwszego p istnieje pierwsze q oraz $l \in \mathbb{N}$, takie że $f(p^k)$ jest potęgą q o wykładniku całkowitym dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$. Dla uproszczenia oznaczeń będziemy zapisywać $P(p) = q$. Wykażemy, że $q = p$.

Załóżmy przeciwnie, tj. dla pewnego p mamy $P(p) = q \neq p$. Jako że zbiory $P(p_i)$ są jednoelementowe, rozłączne i dla $p > 2022$ mamy $P(p) = p$, to P jest bijekcją ze zbioru liczb pierwszych w niego samego. Jeżeli istnieje p, takie że $P(p) = q$, musi istnieć takie p_0, że $P(p_0) = q_0 > p_0$. Zauważmy, że w każdym przedziale postaci

$$[p_0^k,\ p_0^k + 2021]$$

znajduje się przynajmniej jedna potęga liczby q_0 (jest nią $f(p_0)$). Dla odpowiednio dużych $k > k_0$ przedziały opisane wyżej są rozłączne. Wobec tego w przedziale $[0,\ K]$ dla $K = p_0^k + 2021 > p_0^{k_0} + 2021$ zawartych jest przynajmniej $k - k_0$ różnych potęg q_0. Oznacza to, że

$$p_0^k + 2021 \geqslant q_0^{k-k_0}\,.$$

Dla odpowiednio dużych k mamy $p_0^k > 2021$, więc

$$2p_0^k > q_0^{k-k_0}\,,$$

$$2q_0^{k_0} > \left(\frac{q_0}{p_0}\right)^k\,.$$

Lewa strona powyższej nierówności jest stała, zaś prawa może być dowolnie duża dla odpowiednio dużego k. Stanowi to sprzeczność, która dowodzi, że $f(p) = p$ dla każdego pierwszego p.

Weźmy teraz dowolne $n \in \mathbb{N}$. Niech $Q = \{q_1,\ \ldots,\ q_r\}$ jest zbiorem dzielników pierwszych n. Dla dowolnego pierwszego $q \notin Q$ mamy $\mathrm{NWD}(n,\ q) = 1$, więc także $\mathrm{NWD}(f(q) = q^l,\ f(n)) = 1$, czyli $f(n)$ nie jest podzielne przez q. W takim razie jeżeli liczba pierwsza p spełnia $p \mid f(n)$, musi także zajść $p \in Q$, czyli $p \mid n$, co kończy rozwiązanie zadania.

Drugi Mecz Matematyczny

1. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ spełniające dla dowolnych $x, y > 0$ równość

$$f(x+y) = f(x)f(yf(x)).$$

Rozwiązanie:

Wykażemy, że jedynymi funkcjami spełniającymi dane równanie są funkcje postaci $f(x) = \frac{1}{1+ax}$ dla $a \geqslant 0$.

Wykażemy najpierw, że funkcja f jest ograniczona z góry przez 1. Załóżmy przeciwnie i ustalmy $t > 0$ takie, że $f(t) > 1$. Zauważmy, że gdy $x = t$ i $y = \frac{t}{f(t)-1}$, to $x, y > 0$ i $x + y = yf(x)$. Zatem w równości danej w treści zadania możemy skrócić czynniki $f(x+y)$ i $f(yf(x))$ dostając $1 = f(t)$, co jest sprzeczne z wyborem t. W takim razie nie istnieje $t > 0$, dla którego $f(t) > 1$.

Dla dowolnych x, y mamy więc

$$f(x+y) = f(x)f(yf(x)) \leqslant f(x),$$

co oznacza, że funkcja f jest nierosnąca.

Jeśli istnieje $t > 0$ takie, że $f(t) = 1$, to dla dowolnego y mamy $f(t+y) = f(t)f(yf(t)) = f(y)$, tzn. funkcja f jest okresowa. Jednakże nierosnąca funkcja okresowa musi być stała. Otrzymujemy więc $f(x) = 1$ dla każdego x i bez trudu sprawdzamy, że funkcja ta spełnia warunki zadania.

Od teraz zakładamy, że wszystkie wartości funkcji f są mniejsze od 1. Wówczas f jest malejąca, gdyż

$$f(x+y) = f(x)f(yf(x)) < f(x).$$

W szczególności f jest różnowartościowa.

Podstawienie $y := \frac{y}{f(x)}$ prowadzi do równości

$$f\left(x + \frac{y}{f(x)}\right) = f(x)f(y).$$

Zmieniając role x i y w powyższej równości dostajemy

$$f\left(y + \frac{x}{f(y)}\right) = f(y)f(x),$$

skąd wynika, że dla dowolnych x, y zachodzi równość

$$f\left(x + \frac{y}{f(x)}\right) = f\left(y + \frac{x}{f(y)}\right).$$

Z różnowartościowości f dostajemy, że dla dowolnych x, y

$$x + \frac{y}{f(x)} = y + \frac{x}{f(y)}.$$

Podstawmy $y = 1$ i obliczmy $f(x)$ z powyższej równości:

$$f(x) = \frac{1}{1 + x \cdot (\frac{1}{f(1)} - 1)}.$$

To znaczy, że $f(x) = \frac{1}{1+ax}$ gdzie $a = \frac{1}{f(1)} - 1 > 0$. Wszystkie takie funkcje spełniają warunki zadania, bowiem

$$\frac{1}{1+ax} \cdot \frac{1}{1 + a \cdot y \cdot \frac{1}{1+ax}} = \frac{1}{1 + a(x+y)}.$$

2. Rozstrzygnąć, czy istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ o następujących dwóch własnościach:

- A nie zawiera rosnącego ciągu arytmetycznego długości trzy,
- dla każdego $x \notin A$ zbiór $A \cup \{x\}$ zawiera rosnący ciąg arytmetyczny długości trzy.

Rozwiązanie:
Sposób I

Przykładowym zbiorem spełniającym warunki zadania jest zbiór A złożony ze wszystkich liczb rzeczywistych x o następującej własności: dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ takiego że $3^n > |x|$ nieskończone rozwinięcie trójkowe liczby $2 \cdot 3^n + x$ zawiera wyłącznie cyfry 0, 2. Od tego momentu do końca rozwiązania przez „rozwinięcie" będziemy mieli na myśli nieskończone rozwinięcie trójkowe (chyba że napisano inaczej).

Zauważmy przy tym, że warunek definiujący elementy zbioru A jest równoważny takiemu: istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $3^n > |x|$ i dla każdego $m \geqslant n$ rozwinięcie liczby $2 \cdot 3^m + x$ zawiera wyłącznie cyfry 0, 2. Istotnie, jeśli $m \geqslant n$ i $3^n > |x|$, to rozwinięcie liczby $2 \cdot 3^m + x$ powstaje przez wstawienie $m - n$ zer za pierwszą od lewej cyfrą rozwinięcia liczby $2 \cdot 3^n + x$.

Przykładowo, $1 \in A$, bo $2 \cdot 3^1 + 1 = 7$, a rozwinięcie liczby 7 to $20,2222222\ldots$, $\frac{1}{4} \in A$, bo $2 \cdot 3^0 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$, a rozwinięcie liczby $\frac{9}{4}$ to $2,02020202\ldots$; z drugiej strony, $2 \notin A$, bo cyfrą jedności rozwinięcia liczby $2 \cdot 3^n + 2$ jest 1 (np. rozwinięciem liczby $2 \cdot 3^2 + 2 = 20$ jest $201,222222\ldots$). Liczby 0 i $-\frac{1}{4}$ również nie należą do A, bo dla dowolnego n pierwsze cyfry od lewej rozwinięć liczb $2 \cdot 3^n + 0$ i $2 \cdot 3^n + (-\frac{1}{4})$ są jedynkami.

Wykażemy teraz, że A spełnia pierwszy z żądanych warunków. Przypuśćmy nie wprost, że liczby $x_1 < x_2 < x_3$ stanowią ciąg arytmetyczny zawarty w A. Wybierzmy n tak duże, że dla $i = 1, 2, 3$ zachodzi $3^n > |x_i|$ oraz liczby $2 \cdot 3^n + x_i$ mają w swoich rozwinięciach wyłącznie zera i dwójki. Oczywiście, skoro $x_1 < x_3$, to $2 \cdot 3^n + x_1 < 2 \cdot 3^n + x_3$, a więc rozwinięcia tych dwóch liczb różnią się. Wtedy dla pewnego k te rozwinięcia zgadzają się do $(k+1)$-ej cyfry wiodącej, k-tą cyfrą wiodącą liczby $2 \cdot 3^n + x_1$ jest 0, a k-tą cyfrą wiodącą liczby $2 \cdot 3^n + x_3$ jest 2. Ale wtedy k-tą cyfrą wiodącą liczby $2 \cdot 3^n + x_2$ jest 1. W rzeczy samej, oznaczając $x_i' = x_i \pmod{3^{k+1}}$ dla $i = 1, 2, 3$, mamy $x_2' = \frac{x_1' + x_3'}{2}$ oraz

$$3^k = \frac{0 + 2 \cdot 3^k}{2} < \frac{x_1' + x_3'}{2} \leqslant \frac{3^k + 3 \cdot 3^k}{2} = 2 \cdot 3^k,$$

skąd wynika, że k-tą cyfrą wiodącą liczby x_2 jest 1. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że w zbiorze A nie ma rosnącego ciągu arytmetycznego długości 3.

Do wykazania zostało, że A spełnia drugi warunek. Ustalmy liczbę rzeczywistą $y \notin A$. Wybierzmy n tak duże, że $3^n > |y|$. Wtedy rozwinięcie liczby $2 \cdot 3^n + y$ zawiera co najmniej jedną jedynkę. Wskażemy teraz dwie liczby x, z ze zbioru A takie, że $x < y < z$ i ciąg x, y, z jest arytmetyczny, tym samym dowodząc tezy. Niech $S \subset \mathbb{Z}$ będzie zbiorem tych k, że k-ta cyfra wiodąca liczby $2 \cdot 3^n + y$ jest jedynką.

Określmy liczby a (odpowiednio b) poprzez zastąpienie wszystkich jedynek zerami (odpowiednio dwójkami) w rozwinięciu liczby $2 \cdot 3^n + y$. Wtedy ciąg $a, 2 \cdot 3^n + y, b$ jest rosnącym ciągiem arytmetycznym. Zdefiniujmy $x = a - 2 \cdot 3^n$ i $z = b - 2 \cdot 3^n$. Wtedy ciąg x, y, z jest rosnącym ciągiem arytmetycznym. Jeśli S nie zawiera zbioru postaci $\{k, k-1, k-2, k-3, \ldots\}$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, to liczby x i z należą do A i dowód w tym przypadku jest zakończony.

Zwróćmy jednak uwagę na to, że jeśli zbiór S zawiera zbiór postaci $\{k, k-1, k-2, k-3, \ldots\}$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, to definicja liczby a podana w poprzednim akapicie doprowadziłaby do liczby x nienależącej do A, gdyż po zamianie jedynek na zera otrzymalibyśmy liczbę o skończonym rozwinięciu trójkowym, którego ostatnią cyfrą mogła być dwójka. Wtedy (nieskończone) rozwinięcie tej liczby kończyłoby się segmentem postaci $1222222\ldots$ (potencjalnie przedzielonym w pewnym miejscu przecinkiem), a więc otrzymana liczba nie należałaby do A. W tym złośliwym przypadku zmienimy definicję liczb a i b tak, aby liczby x i z należały do A.

W tym celu zdefiniujmy a poprzez zastąpienie jedynek na dwójki na pozycjach $k-1, k-3, k-5, k-7, \ldots$ i jedynek z pozostałych pozycji na zera (gdzie k jest takie jak na początku poprzedniego akapitu). Liczbę b definiujemy na odwrót: zamieniamy jedynki na zera na pozycjach $k-1, k-3, k-5, k-7, \ldots$, a jedynki na pozostałych pozycjach zamieniamy na dwójki. Wówczas liczby x, z określone tymi samymi wzorami jak wyżej należą do A, spełniają $x < y < z$ i ciąg x, y, z jest arytmetyczny. Warunek drugi dany w treści zadania jest zatem spełniony, co kończy rozwiązanie zadania.

Sposób II

Dowód, że postulowany zbiór A istnieje będzie niekonstruktywny, oparty na lemacie Kuratowskiego-Zorna. Zanim sformułujemy treść lematu, wprowadzimy kilka definicji.

Niech $\mathcal{A}$ będzie ustaloną rodziną zbiorów. Powiemy, że $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ jest *łańcuchem* jeśli dla dowolnych $A, B \in \mathcal{C}$ zachodzi $A \subseteq B$ lub $B \subseteq A$. Powiemy, że łańcuch $\mathcal{C}$ ma *ograniczenie górne*, jeśli istnieje $A \in \mathcal{A}$ taki, że $B \subseteq A$ dla każdego $B \in \mathcal{C}$. Powiemy, że $A \in \mathcal{A}$ jest *elementem maksymalnym* rodziny $\mathcal{A}$, jeśli nie istnieje $B \in \mathcal{A}$ taki, że $B \neq A$ i $A \subseteq B$.

Lemat (Kuratowski-Zorn)**.** *Niech $\mathcal{A}$ będzie niepustą rodziną zbiorów o tej własności, że każdy łańcuch ma ograniczenie górne. Wówczas rodzina $\mathcal{A}$ ma element maksymalny.*

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Obierzmy

$$\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} \colon A \text{ nie zawiera rosnącego ciągu arytmetycznego długości trzy}\}.$$

Sprawdzimy teraz, że $\mathcal{A}$ spełnia założenia lematu Kuratowskiego-Zorna. Po pierwsze, rodzina $\mathcal{A}$ jest niepusta, gdyż należy do niej zbiór pusty. Po drugie, rozważmy dowolny łańcuch $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$. Twierdzimy, że jego ograniczeniem górnym jest

$$C = \bigcup \mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R} \colon x \in A \text{ dla pewnego } A \in \mathcal{C}\}.$$

Wprost z definicji zbioru C wynika, że dla dowolnego $A \in \mathcal{C}$ mamy $A \subseteq C$. Musimy jeszcze sprawdzić, że $C \in \mathcal{A}$. Przypuśćmy przeciwnie, wówczas C zawiera rosnący ciąg arytmetyczny długości trzy, nazwijmy jego elementy x_1, x_2, x_3. Wówczas dla $i = 1, 2, 3$ istnieją zbiory $A_i \in \mathcal{C}$ takie, że $x_i \in A_i$. Z założenia, że $\mathcal{C}$ jest łańcuchem wynika, że jeden ze zbiorów A_1, A_2, A_3 jest nadzbiorem pozostałych dwóch, niech będzie to zbiór A_j. Wtedy jednak A_j zawiera liczby x_1, x_2, x_3, tym samym przecząc temu, że A_j nie zawiera żadnego rosnącego ciągu arytmetycznego. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $C \in \mathcal{A}$, wobec czego $\mathcal{C}$ ma ograniczenie górne.

Założenia lematu są więc spełnione. Istnieje więc zbiór $A \in \mathcal{A}$ będący elementem maksymalnym rodziny $\mathcal{A}$. Twierdzimy, że zbiór ten spełnia warunki zadania. Pierwszy warunek zachodzi, bo $A \in \mathcal{A}$. Gdyby drugi warunek nie był spełniony, to dla pewnego $x \notin A$ zbiór $A \cup \{x\}$ nie zawierałby żadnego rosnącego ciągu arytmetycznego długości trzy. Wtedy jednak $A \cup \{x\}$ należałby do $\mathcal{A}$ i $A \subseteq A \cup \{x\}$, co przeczyłoby temu, że A jest elementem maksymalnym rodziny $\mathcal{A}$. Wobec tego zbiór A spełnia także drugi warunek.

3. Dane są dodatnie liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$, których iloczyn wynosi 1. Wykazać, że zachodzi

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-1+x_i} \leqslant 1.$$

Rozwiązanie:

Udowodnimy najpierw następujący lemat.

Lemat 1. *Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wklęsła na przedziale $(-\infty, k]$ i wypukła na przedziale $[k, \infty)$. Wówczas maksimum wyrażenia $f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$ dla liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniających $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$ jest przyjmowane gdy $n-1$ spośród $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są sobie równe.*

Dowód. Przyjmijmy bez straty ogólności, że $x_n \leqslant \ldots \leqslant x_{m+1} \leqslant k \leqslant x_m \leqslant \ldots \leqslant x_1$. Zauważmy, że ciąg $(x_1 + x_2 + \ldots x_m - (m-1)k, k, k, \ldots k)$ majoryzuje ciąg $(x_1, x_2, \ldots x_m)$, czyli na mocy nierówności Karamaty dostajemy

$$f(x_1) + f(x_2) \ldots f(x_m) \leqslant f(x_1 + x_2 + \ldots + x_m - (m-1)k) + (m-1)f(k).$$

Z nierówności Jensena

$$(m-1)f(k) + f(x_{m+1}) + \ldots f(x_n) \leqslant (n-1)f\left(\frac{(m-1)k + x_{m+1} + \ldots + x_n}{n-1}\right)$$

co kończy dowód lematu. □

Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{1}{n-1+e^x}$, możemy policzyć, że $f''(x) = \frac{e^x(e^x-(n-1))}{(n-1+e^x)^3}$. Wnioskujemy stąd, że dla $x \in (-\infty, \ln(n-1)]$ zachodzi $f''(x) \leqslant 0$, a dla $x \in [\ln(n-1), \infty)$ zachodzi $f''(x) \geqslant 0$. Oznacza to, że funkcja f jest wklęsła na przedziale $(-\infty, \ln(n-1)]$ i wypukła na przedziale $[\ln(n-1), \infty)$. Dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ zdefiniujmy $y_i = \ln(x_i)$, możemy tak zrobić ponieważ x_i są dodatnie. Nierówność z tezy zadania jest równoważna nierówności $f(y_1) + f(y_2) + \ldots + f(y_n) \leqslant 1$. Z warunku z treści zadania mamy

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \ln(x_1) + \ln(x_2) + \ldots + \ln(x_n) = \ln(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0.$$

Aplikując lemat możemy przyjąć że $x = x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1}$, a $x_n = \frac{1}{x^{n-1}}$. Dla ułatwienia zapisu oznaczmy $k = n-1$. Nierówność z treści zadania przyjmuje więc formę

$$\frac{k}{k+x} + \frac{1}{k + \frac{1}{x^k}} \leqslant 1$$

Mnożąc mianowniki i upraszczając wyrażenie dostajemy, że powyższa nierówność jest równoważna nierówności $-xk + x + k \leqslant x^{1-k}$. Aby ją wykazać udowodnijmy uogólnienie nierówności Bernoulliego, dla ujemnego wykładnika

Lemat 2. *Dana jest liczba całkowita $r \leqslant 0$ oraz liczba rzeczywista $x \geqslant -1$. Wówczas zachodzi nierówność*

$$(1+x)^r \geqslant 1 + rx.$$

Dowód. Zauważmy, że dla $r = 0$ nierówność zachodzi. Załóżmy, że nierówność zachodzi dla pewnego $r = n \leqslant 0$, udowodnimy że zachodzi też dla $r = n-1$. Prawdą jest, że

$$(1+x)^{n-1} = \frac{(1+x)^n}{(1+x)} \geqslant \frac{1+nx}{1+x} \geqslant 1 + (n-1)x$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z

$$1 + nx \geqslant (1+x)(1+(n-1)x) \iff 1 + nx \geqslant 1 + x + (n-1)x + (n-1)x^2 \iff 0 \geqslant (n-1)x^2.$$

□

Na mocy udowodnionego lematu dostajemy $x^{1-k} = (1+(x-1))^{1-k} \geqslant 1 + (1-k)(x-1) = x + k - xk$, co kończy dowód.

4. Dane są niepuste zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Wykazać, że istnieją takie niepuste rozłączne zbiory indeksów I, J, że

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{j \in J} A_j.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy $a_{i,j} = 1$ gdy $i \in A_j$ i $a_{i,j} = 0$ gdy $i \notin A_j$. Rozważmy układ następujących n równań liniowych zmiennych rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$:

$$\begin{gathered}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ldots + a_{1,n+1}x_{n+1} = 0, \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \ldots + a_{2,n+1}x_{n+1} = 0, \\
\vdots \\
a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + a_{n,3}x_3 + \ldots + a_{n,n+1}x_{n+1} = 0.
\end{gathered}$$

Ponieważ układ ma mniej równań niż zmiennych, to istnieje niezerowe rozwiązanie tego układu. Ustalmy jedno z takich rozwiązań $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$. Niech I będzie zbiorem tych indeksów i, dla których $x_i > 0$ oraz niech J będzie zbiorem tych indeksów j, że $x_j < 0$. Twierdzimy, że tak dobrane zbiory I i J spełniają warunki zadania.

Udowodnimy, że dla $k = 1, 2, \ldots, n$ mamy równoważność $k \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff k \in \bigcup_{j \in J} A_j$. Skupmy swoją uwagę na k-tym równaniu. Można przepisać je w postaci

$$\sum_{i \in I} a_{k,i}x_i = \sum_{j \in J} a_{k,j}(-x_j).$$

Zwróćmy uwagę na to, że $a_{k,i} \geqslant 0$ i $x_i > 0$ dla $i \in I$ oraz $a_{k,j} \geqslant 0$ i $-x_j > 0$ dla $j \in J$.

Jeśli $k \in \bigcup_{i \in I} A_i$, to $k \in A_{i'}$ dla pewnego $i' \in I$. Wtedy $a_{k,i'} = 1$, a zatem suma stojąca po lewej stronie jest dodatnia. W takim razie suma stojąca po prawej stronie też jest dodatnia, i w konsekwencji $a_{k,j'} = 1$ dla pewnego $j' \in J$. Zatem $k \in A_{j'}$, więc $k \in \bigcup_{j \in J} A_j$.

Podobnie, jeśli $k \notin \bigcup_{i \in I} A_i$, to $k \notin A_i$ dla wszystkich $i \in I$. Wtedy wszystkie liczby $a_{k,i}$ dla $i \in I$ są zerowe. To oznacza, że lewa strona równania jest zerowa, więc prawa także. Stąd $a_{k,j} = 0$ dla wszystkich $j \in J$. Zatem $k \notin A_j$ dla wszystkich $j \in J$ i ostatecznie $k \notin \bigcup_{j \in J} A_j$.

5. Danych jest n liczb całkowitych $a_1, a_2, ..., a_n$ spełniających dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant n$ warunek $i - n \leqslant a_i \leqslant i - 1$. Udowodnić, że istnieje niepusty podzbiór $S \subseteq \{1 \ldots, n\}$, dla którego

$$\sum_{i \in S} a_i = 0.$$

Rozwiązanie:

Warunek z zadania można przepisać jako:

$$1 \leqslant i - a_i \leqslant n.$$

Niech G będzie grafem skierowanym, którego wierzchołkami są liczby naturalne od 1 do n, a zbiorem krawędzi

$$\{(i, i - a_i) \colon i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Wykorzystamy następujący fakt udowodniony już w rozwiązaniu do zadania 29. z zawodów indywidualnych.

Fakt. *Jeżeli w grafie skierowanym z każdego wierzchołka wychodzi co najmniej jedna krawędź, to graf zawiera cykl.*

Niech $i_1, i_2, ..., i_k$ będą kolejnymi wierzchołkami tego cyklu. Wówczas:

$$\begin{aligned}
&i_2 = i_1 - a_{i_1}\\
&i_3 = i_2 - a_{i_2}\\
&...\\
&i_k = i_{k-1} - a_{i_{k-1}}\\
&i_1 = i_k - a_{i_k}
\end{aligned}$$

Sumując te równania dostaniemy $a_{i_1} + a_{i_2} + ... + a_{i_k} = 0$, co kończy rozwiązanie.

6. Mamy daną prostokątną tabelę o n wierszach i m kolumnach. W każde pole wpisana jest liczba rzeczywista w taki sposób, że suma liczb w każdej kolumnie i w każdym wierszu jest całkowita. Udowodnić, że można zamienić każdą liczbę x w tabeli na $\lfloor x \rfloor$ lub $\lceil x \rceil$ w taki sposób, aby sumy liczb w kolumnach i wierszach się nie zmieniły.

Rozwiązanie:
Sposób I

Zauważmy najpierw, że możemy zmodyfikować zadanie zamieniając każdą wartość pola x na $\{x\} \in [0, 1)$. Łatwo zobaczyć, że gdy rozwiążemy problem dla zmienionej tablicy, to stosując tak samo podłogi i sufity w oryginalnej rozwiążemy go również dla niej. Zastosujemy teraz wielokrotnie procedurę, która zmienia wartości w polach z przedziału $(0, 1)$ na wartości z $[0, 1]$ tak, że suma pól w każdej kolumnie i każdym wierszu zostaje zachowana oraz co najmniej jedna niecałkowita wartość zmienia się na 0 lub 1.

Będziemy chcieli znaleźć taki zbiór pól o niecałkowitych wartościach, żeby każda kolumna/wiersz zawierająca jakieś pole z tego zbioru zawierała dokładnie dwa takie pola. Niech (i, j) oznacza pole na przecięciu i-tego wiersza i j-tej kolumny. Skonstruujmy nieskierowany graf G o $n + m$ wierzchołkach $a_1, \dots a_n, b_1, \dots b_m$ w następujący sposób: jeśli na polu (i, j) jest liczba niecałkowita, dodajemy krawędź od a_i do b_j. Powstały graf dwudzielny ma tę własność, że z każdego wierzchołka o niezerowym stopniu wychodzą co najmniej dwie krawędzie (gdyby z jakiegoś wierzchołka wychodziła tylko jedna krawędź to w odpowiadającym temu wierzchołkowi wierszu bądź kolumnie byłaby tylko jedna wartość niecałkowita, co jest niemożliwe, ponieważ suma liczb w każdym wierszu/kolumnie jest całkowita). Jeśli w grafie nie ma wierzchołków stopnia 1 i jest przynajmniej jedna krawędź, to istnieje w nim cykl prosty. Niech kolejnymi wierzchołkami tego cyklu będą:

$$a_{i_1}, b_{j_1}, a_{i_2}, b_{j_2}, ..., a_{i_k}, b_{j_k}$$

Na polach (i_1, j_1), (i_2, j_2), ..., (i_k, j_k) dodamy do wartości pewną liczbę dodatnią ϵ, zaś od wartości na polach (i_2, j_1), $(i_3, j_2), \dots, (i_1, j_k)$ odejmiemy ϵ, przy czym ϵ dobierzemy tak, aby co najmniej jedna z wartości stała się całkowita, a każda wartość pozostała w przedziale $[0, 1]$.

Widzimy, że powyższa procedura nie zmienia sum w wierszach i kolumnach oraz zmniejsza liczbę pól niecałkowitych. Żadna wartość nie przestaje być całkowita, więc po wielokrotnym zastosowaniu powyższego procesu do momentu, kiedy nie będzie wartości niecałkowitych otrzymamy sytuację, gdzie każda wartość x zmieniła się na $\lfloor x \rfloor$ lub $\lceil x \rceil$ oraz sumy wierszy i kolumn pozostały takie same, co kończy dowód.

Sposób II

Tak jak wyżej zakładamy, że wartości pól są w przedziałach $[0, 1)$. Skonstruujmy sieć przepływową na podstawie tabeli. Wierzchołkami będą reprezentowały: abstrakcyjne źródło i ujście, kolumny, wiersze, pola z niecałkowitymi wartościami. Ze źródła prowadzimy krawędzie do wierzchołków kolumn o przepustowościach równych ich sumom. Analogicznie prowadzimy krawędzie od wierzchołków wierszy do ujścia o przepustowościach równych ich sumom. Dla wierzchołków pól prowadzimy do nich krawędź od wierzchołka odpowiadającej im kolumny i od nich krawędź do odpowiadającego wierzchołka wiersza, obie o przepustowości 1.

Przeanalizujmy tą sieć. Maksymalny przepływ nie jest większy od sumy krawędzi wychodzących z ujścia, czyli inaczej sumy wszystkich pól tabeli. Z drugiej strony, możemy ustalić przepływ, który wzdłuż krawędzi od i do wierzchołków pól wynosi ich wartość w tabeli, a wzdłuż krawędzi od źródła i do ujścia jest równy przepustowości. Ma on wartość równą sumie pól w tabeli, więc jest on maksymalny. Z kolei ta sieć ma całkowite przepustowości, zatem zgodnie z metodą Forda-Fulkersona istnieje maksymalny przepływ o całkowitych przepływach wzdłuż krawędzi. Jeżeli zgodnie z nim zmienimy x na $\lceil x \rceil$, gdy na wzdłuż odpowiednich krawędzi przepływ wynosi 1, a na $\lfloor x \rfloor$, gdy wynosi on 0, to widzimy, że otrzymamy szukaną zmianę wartości, co kończy dowód.

7. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC, a G jest jego środkiem ciężkości. Niech D będzie środkiem odcinka BC. Wysokość opuszczona z wierzchołka A przecina okrąg o średnicy BC wewnątrz trójkąta ABC w punkcie E. Proste EG i OD przecinają się w punkcie F. Na boku BC wybieramy takie punkty K, L, że $FK \parallel OB$ oraz $FL \parallel OC$. Punkt M leży na prostej AB i spełnia $MK \perp BC$, zaś punkt leży N na prostej AC i spełnia $LN \perp BC$. Wykazać, że istnieje okrąg styczny do prostych OB, OC w punktach B, C oraz do okręgu opisanego na trójkącie AMN.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez H ortocentrum trójkąta ABC. Niech punkty X, Y będą przecięciami prostej AC odpowiednio z prostą OD oraz z wysokością trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka B. Oczywiście punkty O, H, G leżą na prostej Eulera„ czyli możemy zapisać

$$\frac{AE}{EH} = \frac{DF}{FO} = \frac{DL}{LC} = \frac{XN}{NC}.$$

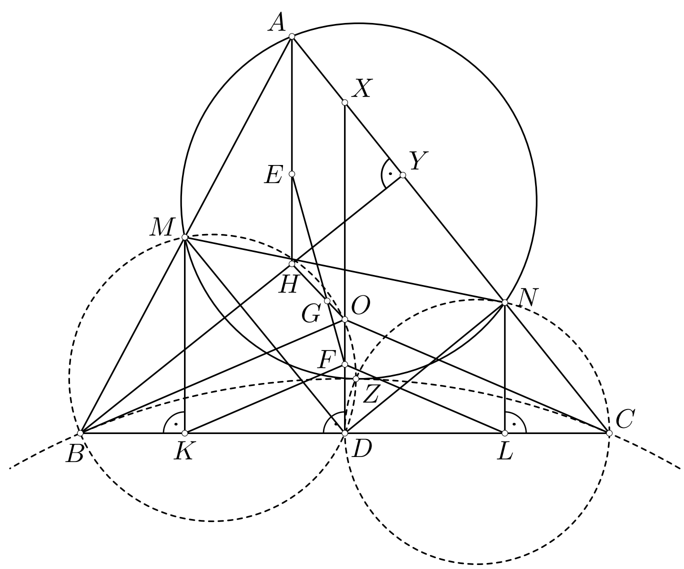
Trójkąty prostokątne XDC, AYH mają te same kąty, zatem są podobne. Ponadto punkty N i E dzielą odpowiednie boki tych trójkątów w tym samym stosunku. To oznacza, że $\sphericalangle NDC = \sphericalangle HYE = \sphericalangle ECB$ i podobnie $\sphericalangle EBC = \sphericalangle MDB$. Po dodaniu stronami otrzymujemy $\sphericalangle MDB + \sphericalangle NDC = \sphericalangle EBC + \sphericalangle ECB = 90^\circ$, czyli $\sphericalangle MDN = 90^\circ$. Punkt D jest środkiem odcinka KL, zatem prosta OD, będąca linią środkową trapezu $MKLN$, przechodzi przez środek odcinka MN. Jest to środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym MDN, czyli prosta BC jest styczna do tego okręgu. Mamy więc $\sphericalangle DNM = \sphericalangle MDB$. Niech Z będzie punktem Miquela dla trójkąta ABC i punktów D, M, N, czyli przecięciem okręgów opisanych na trójkątach AMN, BMD, CND. Możemy zapisać:

$$\sphericalangle MZB = \sphericalangle MDB = \sphericalangle DNM = \sphericalangle DNZ + \sphericalangle MNZ = \sphericalangle BCZ + \sphericalangle MAZ. \tag{1}$$

Ponadto

$$\begin{aligned} \sphericalangle BZC &= \sphericalangle BZD + \sphericalangle DZC = \sphericalangle BMD + \sphericalangle CND \\ &= 360^\circ - \sphericalangle ABC - \sphericalangle ACB - \sphericalangle MDB - \sphericalangle NDC \\ &= 360^\circ - \sphericalangle ABC - \sphericalangle ACB - 90^\circ \\ &= 90^\circ + \sphericalangle BAC. \end{aligned}$$

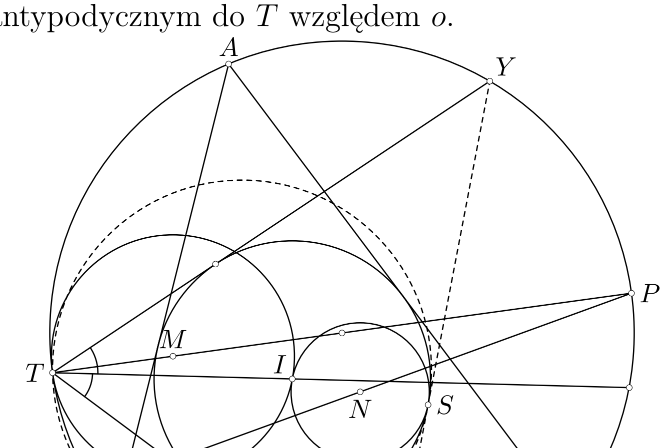
Oznaczając środek okręgu ω stycznego do odcinków OB, OC w B, C przez S dostajemy $\sphericalangle BSC = 180^\circ - 2\sphericalangle BAC$, czyli punkt Z leży na tym okręgu. Znanym faktem jest, że równość (1) implikuje styczność okręgu opisanego na trójkącie AMN z okręgiem ω w punkcie S, co dowodzi tezy.



8. Oznaczmy przez ω i o odpowiednio okrąg wpisany i opisany na trójkącie ABC. Niech I będzie środkiem ω. Okręgi τ_1 i τ_2 odpowiednio o środkach M i N są styczne zewnętrznie w punkcie I. Okrąg τ_1 jest styczny wewnętrznie do o w punkcie T, natomiast τ_2 jest styczny wewnętrznie do ω w punkcie S. Prosta TM przecina o w punkcie P, a prosta PN przecina o w punkcie R. Wykazać, że okrąg opisany na trójkącie RST jest styczny do ω.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez X, Y punkty przecięcia prostych stycznych do okręgu ω poprowadzonych z punktu T z okręgiem o. Na mocy twierdzenia Ponceleta prosta XY jest styczna do okręgu ω. Niech ℓ i k będą prostymi stycznymi do τ_2 odpowiednio w punktach I i S. Na mocy jednokładności o środku w punkcie T, przekształcającej okrąg τ_1 na okrąg o, prosta TI przechodzi przez środek łuku okręgu o wyznaczony przez prostą ℓ. Jako, że prosta k jest równoległa do prostej ℓ wnioskujemy, że prosta TI przechodzi przez środek łuku okręgu o wyznaczonego przez prostą k. Z drugiej strony prosta TI jest dwusieczną kąta XTY, więc prosta TI przechodzi przez środek łuku XY okręgu o. Wnioskujemy stąd, że XY jest równoległa do k. Jako, że zarówno XY jak i k są styczne do ω dostajemy, że XY i k się pokrywają, czyli XY jest styczna do ω i τ_2 w punkcie S. Ponownie korzystając z jednokładności możemy zaobserwować, że punkt P jest punktem antypodycznym do T względem o.



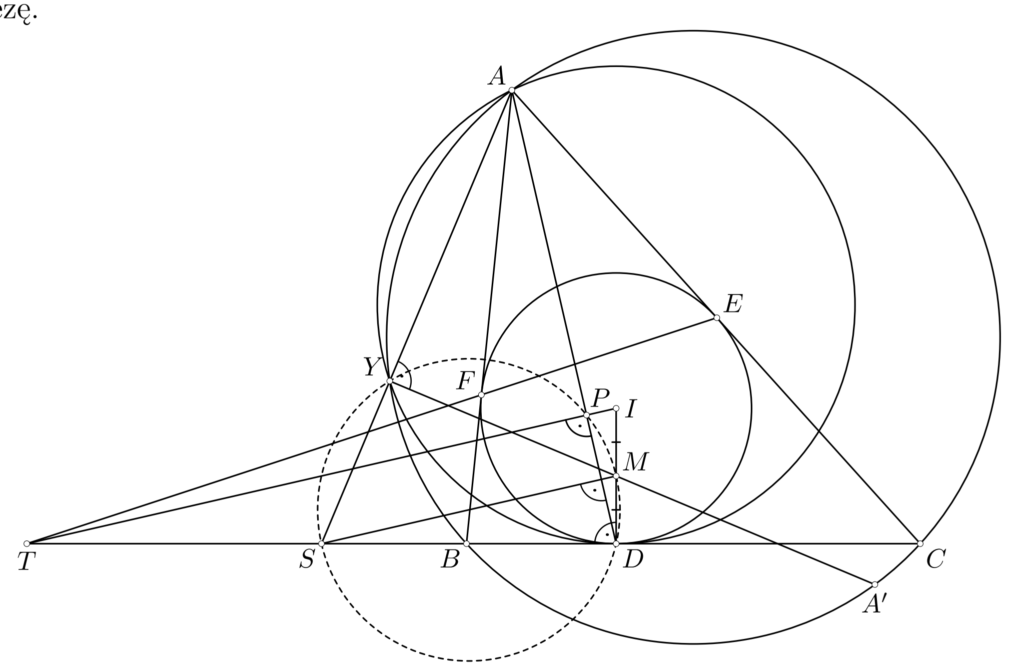
Sprowadziliśmy więc zadanie do następującego lematu

Lemat. *Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB \neq AC$. Okrąg ω o środku w I jest wpisany w trójkąt ABC i styczny do boku BC w D. Oznaczmy przez o okrąg opisany na trójkącie ABC. Punkt A' jest punktem antypodycznym do A względem o. Punkt M jest środkiem ID. Prosta $A'M$ przecina o w punkcie X. Wykazać, że okrąg opisany na trójkącie AXD jest styczny do boku BC.*

Dowód. Bez straty ogólności załóżmy, że $AB < AC$. Oznaczmy przez E i F punkty styczność okręgu ω odpowiednio z bokami AC i AB. Zauważmy, że istnieje dokładnie jeden okrąg styczny do prostej BC w punkcie D i jednocześnie przechodzący przez punkt A, oznaczmy ten okrąg przez τ. Niech okrąg τ przecina okrąg o w punktach A i Y. Wystarczy udowodnić, że punkty X i Y się pokrywają, czyli że punkty Y, M i A' są współliniowe. Niech proste EF i AY przecinają BC odpowiednio w punktach T i S. Oznaczmy przez P punkt przecięcia prostej AD z TI. Jako, że proste AD, BE oraz CF przecinają się w jednym punkcie mamy $(B, C; D, T) = -1$. Rozpisując potęgę punktu S względem okręgu τ oraz o wnioskujemy, że $SD^2 = SA \cdot SY = SC \cdot SB$. Na mocy lematu Newtona wnioskujemy, że S jest środkiem odcinka TD. Ponadto prosta AD jest biegunową T względem okręgu ω, więc $AD \perp TI \parallel SM$. Dostajemy stąd, że punkt P jest spodkiem wysokości w trójkącie IDT. Korzystając z podobieństwa trójkątów SYD i ASD możemy zapisać równość kątów

$$\sphericalangle SYD = \sphericalangle SDA = 90^\circ - \sphericalangle DSM = \sphericalangle SMD.$$

Dostajemy stąd, że punkty S, D, M i Y leżą na jednym okręgu, czyli $\sphericalangle AYM = \sphericalangle MDS = 90^\circ = \sphericalangle AYA'$, co implikuje tezę.



□

9. Okrąg wpisany w trójkąt ABC ma środek w punkcie I oraz jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach D, E i F. Punkty I_B, I_C są środkami okręgów dopisanych do trójkąta ABC, odpowiednio naprzeciwko wierzchołków B i C. Punkty P i Q są środkami odcinków I_BE, I_CF. Okrąg opisany na trójkącie APC przecina AB w punkcie $R \neq A$, a okrąg opisany na trójkącie ABQ przecina AC w punkcie $S \neq A$. Wykazać, że proste PR, QS i AI przecinają się w jednym punkcie.

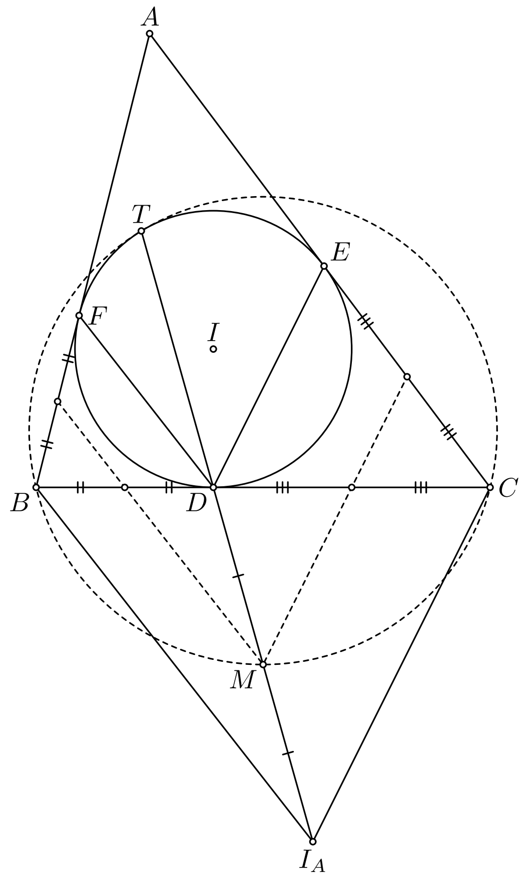
Rozwiązanie:

Sposób I

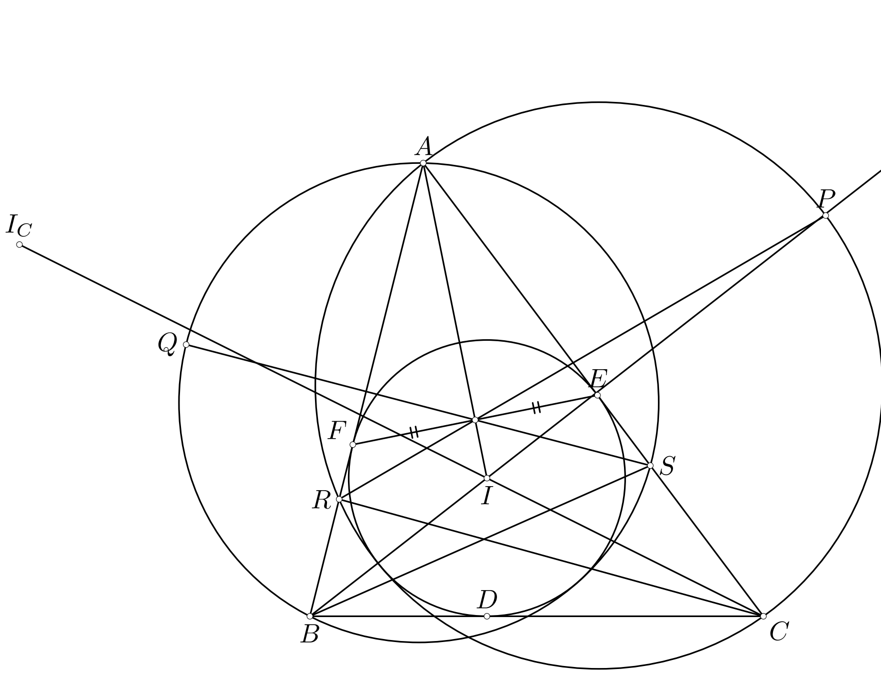
Udowodnimy najpierw następujący lemat.

Lemat. *Dany jest trójkąt ABC. Okrąg wpisany jest styczny do boków BC, CA, AB w punktach D, E, F. Punkt I_A jest środkiem okręgu dopisanego do tego trójkąta, stycznego do odcinka BC. Punkt M jest środkiem odcinka DI_A. Wówczas okrąg opisany na trójkącie BCM jest styczny do okręgu wpisanego.*

Dowód. Oznaczmy okrąg wpisany w trójkąt ABC przez o. Mamy $DF \parallel I_AB$, gdyż obie te proste są prostopadłe do BI. Podobnie, $DE \parallel I_AC$. Linia środkowa trapezu $DFBI_A$ przechodzi przez środki odcinków BF i BD, więc jest osią potęgową okręgu o i punktu B. Podobnie rozumując dowodzimy, że linia środkowa trapezu $DECI_A$ jest osią potęgową okręgu o i punktu C. W takim razie M jest środkiem potęgowym o, B i C. Stąd $MB^2 = MD \cdot MT = MC^2$, gdzie T jest drugim punktem przecięcia prostej MD z o. Z równości $MB^2 = MD \cdot MT$ mamy podobieństwo trójkątów MBT i MDB, skąd $\sphericalangle BTM = \sphericalangle MBD$. Podobnie, $\sphericalangle MTC = \sphericalangle DCM$. Stąd $\sphericalangle BTC + \sphericalangle CMB = \sphericalangle BTM + \sphericalangle MTC + \sphericalangle CMB = \sphericalangle MBC + \sphericalangle BCM + \sphericalangle CMB = 180^\circ$, więc punkt T leży na okręgu opisanym na trójkącie BCM, który oznaczymy przez ω. Pozostało wykazać, że okręgi o i ω mają wspólną styczną w punkcie T. Niech k będzie styczną do o w punkcie T. Mamy wtedy $\sphericalangle(k, TD) = \sphericalangle TDB = \sphericalangle TMB + \sphericalangle MBD = \sphericalangle TCB + \sphericalangle BCM = \sphericalangle TCM$, a zatem prosta k jest styczna do ω. $\square$



Przejdźmy już do naszego zadania. Z lematu wynika, że okrąg opisany na trójkącie ABQ jest styczny do okręgu wpisanego. Dla trójkąta ABS są to odpowiednio okrąg opisany oraz $A-$mixtilinear. Znanym faktem jest, że środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt będzie środek odcinka EF (dowód można znaleźć w rozwiązaniu zadania 16 z zawodów indywidualnych). Ponadto z dowodu lematu wiemy, że Q jest środkiem łuku AB okręgu ABS, czyli prosta QS jest dwusieczną kąta ASB, skąd połowi ona odcinek EF. Analogicznie PR połowi odcinek EF. To oznacza, że te proste przecinają się w środku EF, który oczywiście leży na AI.



Sposób II

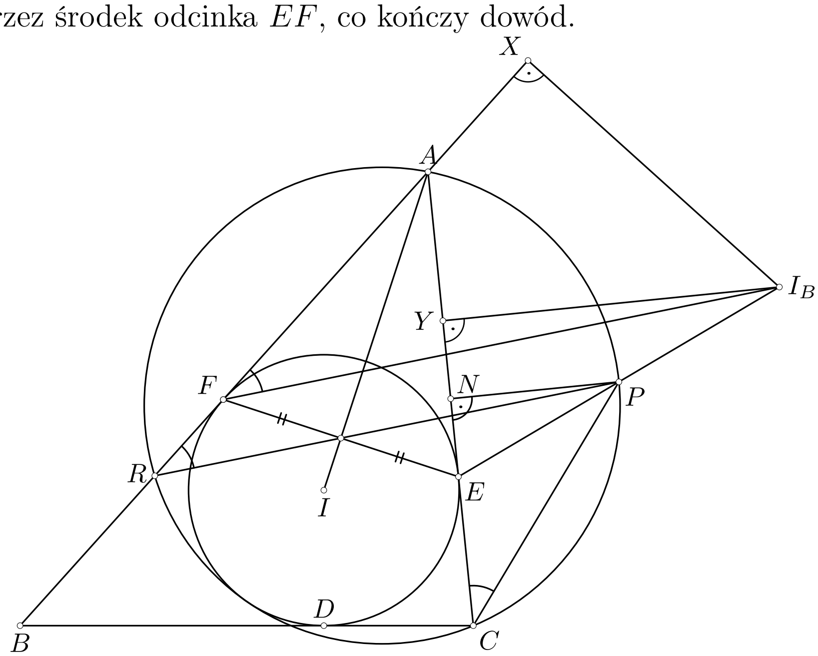
Niech X i Y będą rzutami I_B odpowiednio na proste AB i AC i niech N będzie środkiem AC. Ze znanych równości

$$BF = \frac{BA + BC - AC}{2} \quad \text{oraz} \quad BX = \frac{BA + BC + AC}{2}$$

otrzymujemy, że $FX = AC = 2NC$. Z również znanej równości $AE = YC$ wynika, że $PN \perp AC$ oraz $PN = \frac{1}{2}I_BY = \frac{1}{2}I_BX$. Stąd $\triangle XI_BF \sim \triangle NPC$, zatem

$$\sphericalangle I_BFX = \sphericalangle PCN = \sphericalangle PCA = \sphericalangle PRA = \sphericalangle PRX.$$

Czyli $I_BF \parallel PR$, więc PR przechodzi przez środek odcinka EF. Analogicznie uzasadniamy, że QS również przechodzi przez środek odcinka EF, co kończy dowód.



10. Dane są dodatnie liczby całkowite n i N. Wykazać, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita k, że liczba $2^k - n$ ma przynajmniej N różnych dzielników pierwszych.

Rozwiązanie:

Na początku zauważmy, że zamiast rozważać liczbę n, możemy rozważać największy jej dzielnik nieparzysty. Istotnie, jeśli zapiszemy $n = 2^a(2b+1)$, to dla dużych k mamy $2^k - n = 2^a(2^{k-a} - (2b+1))$, czyli warunek o nieograniczoności liczby różnych dzielników pierwszych nie zmienia się. Załóżmy nie wprost, że dla pewnej dodatniej liczby całkowitej n liczba różnych dzielników pierwszych liczb postaci $2^k - n$ jest ograniczona. Wybierzmy jedno z takich k, że jest ona największa możliwa. Zapiszmy $2^k - n = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$. Wówczas istnieje takie M, że dla każdego i mamy $p_i^M \nmid 2^k - n$. Niech

$$l = \prod_{i=1}^{s} (p_i - 1) p_i^{\alpha_i - 1}.$$

Wtedy z twierdzenia Eulera dla dowolnego indeksu i zachodzi podzielność $p_i^M \mid 2^l - 1$. Rozważmy liczbę $2^{k+tl} - n$ dla pewnego dużego t. Widzimy, że modulo dowolne p_i^M zachodzą równości

$$2^{k+tl} - n \equiv 2^k \cdot (2^l)^t - n \equiv 2^k - n \equiv 0.$$

To oznacza, że każda z liczb $p_1, p_2, \dots, p_s$ jest dzielnikiem pierwszym liczby $2^{k+tl} - n$. Z wyboru k wynika, że muszą to być wszystkie dzielniki pierwsze tej liczby. Możemy zatem zapisać

$$2^{k+tl} - n = p_1^{\beta_1} \dots p_s^{\beta_s}.$$

Skoro t mogliśmy wybrać dowolnie duże, to dla pewnego wyboru musi zajść nierówność $\beta_i \geqslant M$ dla pewnego indeksu i. Widzimy teraz, że modulo p_i^M mamy

$$0 \equiv 2^{k+tl} - n \equiv 2^k \cdot (2^l)^t - n \equiv 2^k - n.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność z wyborem M, co kończy dowód nie wprost.

11. Dana jest dodatnia liczba całkowita a oraz liczba pierwsza $p > 3$, dla których zachodzi $p \mid a^2+a+1$. Udowodnić, że $p^3 \mid (a+1)^p - a^p - 1$.

Rozwiązanie:

Wpierw wykażemy, że liczba p jest postaci $6k+1$. Wystarczy wykluczyć możliwość $p = 6k+5$, bo pozostałe reszty z dzielenia przez sześć dają liczby podzielne przez 2 lub 3. Przyjmijmy więc nie wprost, że $p = 6k+5$. Mamy $a^3 - 1 = (a-1)(a^2+a+1) \equiv 0 \pmod{p}$, więc $a^3 \equiv 1 \pmod{p}$ i z małego twierdzenia Fermata dostajemy $1 \equiv a^{6k+4} = (a^3)^{2k+1} \cdot a \equiv a \pmod{p}$, skąd $0 \equiv a^2 + a + 1 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 3 \pmod{p}$, co przeczy założeniu, że $p > 3$. Dalsze rozumowanie przeprowadzimy na dwa sposoby.

Sposób I

Udowodnimy, że istnieje taki wielomian $F(x)$ o współczynnikach całkowitych, że

$$p(x^2 + x + 1)^2 \cdot F(x) = (x+1)^p - x^p - 1.$$

Wtedy wstawiając $x = a$ w powyższej równości otrzymamy tezę zadania. Niech $G(x) = \frac{1}{p}\left((x+1)^p - x^p - 1\right)$. Zauważmy, że $G(x)$ jest unormowanym wielomianem o współczynnikach całkowitych, ponieważ

$$(x+1)^p - x^p - 1 = \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} x^k$$

oraz dla każdego $1 \leqslant k \leqslant p-1$ liczba $\binom{p}{k}$ jest podzielna przez p.

Wielomian $(x^2 + x + 1)^2$ jest unormowany, zatem dla zakończenia dowodu wystarczy sprawdzić, że wszystkie jego pierwiastki (zespolone) z krotnościami są również pierwiastkami wielomianu $G(x)$.

Niech $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ będzie pierwiastkiem pierwotnym trzeciego stopnia z jedynki. Wtedy $\omega^2+\omega+1 = 0$. Liczby ω i ω^2 są pierwiastkami wielomianu $x^2 + x + 1$. Pamiętając, że p jest postaci $6k+1$, możemy napisać

$$G(\omega) = \frac{1}{p}\left((\omega+1)^p - \omega^p - 1\right) = \frac{1}{p}\left((-1)^p(\omega^p)^2 - \omega^p - 1\right) = \frac{1}{p}\left(-\omega^2 - \omega - 1\right) = 0$$

oraz
$$G'(\omega) = (\omega+1)^{p-1} - \omega^{p-1} = (-1)^{p-1}\omega^{2p-2} - \omega^{p-1} = 1 - 1 = 0.$$

Podobnie dowodzimy, że $G(\omega^2) = G'(\omega^2) = 0$. Dowód jest zakończony na mocy poniższego, powszechnie znanego faktu.

Fakt. *Jeżeli dla pewnego z oraz wielomianu $P(x)$ zachodzi $P(z) = P'(z) = 0$, to $(x-z)^2 \mid P(x)$.*

Sposób II

Zauważmy, że
$$2a+1 \not\equiv 0 \pmod{p}.$$
W przeciwnym razie byłoby $0 \equiv (2a+1)^2 = 4a^2+4a+1 = 4(a^2+a+1) - 3 \equiv -3 \pmod{p}$, co znowu dałoby sprzeczność z założeniem $p > 3$.

Poczyńmy jeszcze obserwację, że
$$p \nmid a \quad \text{oraz} \quad p \nmid a+1.$$
Istotnie, gdyby $p \mid a$ bądź $p \mid a+1$, to z $p \mid a^2+a+1 = a(a+1)+1$ wynikłoby, że $p \mid 1$, co oczywiście nie jest prawdą.

Znajdziemy teraz taką liczbę b postaci $a+mp$, że
$$p^2 \mid b^2+b+1.$$
Liczba a^2+a+1 dzieli się przez p, więc dla pewnej liczby s mamy $a^2+a+1 \equiv ps \pmod{p^2}$. Mamy
$$\begin{aligned} b^2+b+1 &= (a+mp)^2 + (a+mp) + 1 \\ &= a^2 + 2amp + m^2p^2 + a + mp + 1 \\ &\equiv a^2+a+1 + pm(2a+1) \pmod{p^2} \\ &\equiv ps + pm(2a+1) \pmod{p^2}. \end{aligned}$$
Wybierając m w taki sposób, aby $m(2a+1) \equiv -s \pmod{p}$, dostaniemy $ps + pm(2a+1) \equiv 0 \pmod{p^2}$, czyli $p^2 \mid b^2+b+1$. Wybór liczby m jest możliwy, gdyż $2a+1 \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Wykażemy teraz, że $p^3 \mid (a+1)^p - a^p - 1 \iff p^3 \mid (b+1)^p - b^p - 1$. Mamy
$$(b+1)^p = (a+1+mp)^p = (a+1)^p + \binom{p}{1}(a+1)^{p-1}mp + \sum_{i=2}^{p}\binom{p}{i}(a+1)^{p-i}(pm)^i.$$
Wszystkie składniki w sumie dzielą się przez p^3, więc
$$(b+1)^p \equiv (a+1)^p + p^2m(a+1)^{p-1} \pmod{p^3}.$$
Analogicznie rozumując otrzymujemy $b^p \equiv a^p + p^2ma^{p-1} \pmod{p^3}$. Wobec tego
$$(b+1)^p - b^p - 1 \equiv (a+1)^p - a^p - 1 + mp^2((a+1)^{p-1} - a^{p-1}) \pmod{p^3}.$$
Na mocy małego twierdzenia Fermata mamy, że
$$(a+1)^{p-1} \equiv 1 \equiv a^{p-1} \pmod{p}$$
i wobec tego
$$mp^2((a+1)^{p-1} - a^{p-1}) \equiv 0 \pmod{p^3}.$$
Ostatecznie wnioskujemy, że
$$(b+1)^p - b^p - 1 \equiv (a+1)^p - a^p - 1 \pmod{p^3}.$$

Teraz udowodnimy, że da się dobrać n tak, że $c = b+np^2$ spełnia $p^3 \mid c^2+c+1$. Liczba b^2+b+1 dzieli się przez p^2, więc $b^2+b+1 \equiv tp^2 \pmod{p^3}$ dla pewnego t. Wykonując podobne rachunki jak wcześniej, dostajemy

$$c^2+c+1 = b^2+b+1+n^2p^4+p^2n(2b+1) \equiv p^2(t+n(2b+1)) \pmod{p^3}.$$

Mamy $2b+1 \equiv 2a+1 \not\equiv 0 \pmod{p}$, więc możemy dobrać n tak, że $n(2b+1) \equiv -t \pmod{p}$, tym samym zapewniając sobie, że $c^2+c+1 \equiv 0 \pmod{p^3}$.

Wykażemy teraz, że $p^3 \mid (c+1)^p - c^p - 1 \iff p^3 \mid (b+1)^p - b^p - 1$. Mamy

$$(c+1)^p = (b+1+np^2)^p = (b+1)^p + \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} (b+1)(np^2)^i \equiv (b+1)^p \pmod{p^3},$$

gdyż wszystkie składniki sumy dzielą się przez p^3. Podobnie, $c^p \equiv b^p \pmod{p^3}$. Ostatecznie otrzymujemy

$$(c+1)^p - c^p - 1 \equiv (b+1)^p - b^p - 1 \pmod{p^3}.$$

Wystarczy więc sprawdzić, że $(c+1)^p - c^p - 1 \equiv 0 \pmod{p^3}$. To jest jednak niemal natychmiastowe. Przypomnijmy, że $c^2+c+1 \equiv 0 \pmod{p^3}$. Mamy więc również $c^3 \equiv 1 \pmod{p^3}$. Pamiętajmy też, że $p = 6k+1$. Mamy przeto

$$(c+1)^p - c^p - 1 = (c+1)(c^2+2c+1)^{3k} - c^{6k+1} - 1 \equiv (c+1)\cdot c^{3k} - c - 1 \equiv (c+1) - c - 1 \equiv 0 \pmod{p^3}.$$

Regulamin Meczu Matematycznego

Ustalenia wstępne

1. W Meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.
2. W pierwszej fazie Meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą Meczu jest rozgrywka.

Rozgrywka

3. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.
4. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...

5. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.
6. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.
7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.
8. Jeśli zawodnik zostaje wybrany do referowania po raz n-ty, przystępuje do referowania z prawdopodobieństwem $\left(\frac{4}{3}\right)^{1-n+m}$, gdzie m oznacza minimum liczby zakończonych referowań spośród wszystkich zawodników drużyny referującej. W przeciwnym wypadku Kapitan drużyny referującej wyznacza osobę do referowania zgodnie z punktem **7**.
9. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.
10. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach **7–9**. Drużyna zmieniająca referującego traci N punktów przy swojej N-tej zmianie w czasie Meczu.
11. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.
12. Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności lub kompletności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.
13. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach **6–11**. W tym przypadku, jeżeli przedstawione rozwiązanie nie zostanie uznane przez Jury za poprawne, drużyna otrzymuje -10 punktów i opuszcza się punkt 14.

14. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...

15. Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6–11**.
16. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo -10 (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu. Jury ma prawo zadać pytania referującemu w celu ustalenia oceny.

Ustalenia końcowe

17. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań lub gdy różnica pomiędzy wynikami obu drużyn jest większa niż 40 punktów. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.
18. Po 3 godzinach meczu czas na referowanie zadania zostaje skrócony do 5 minut, a wszystkie punkty ujemne liczą się dwukrotnie.
19. Przewodniczący Jury może nałożyć karę punktową na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.
20. Interpretacja niniejszego regulaminu należy do przewodniczącego Jury.

Spis treści

Treści zadań **5**
Zawody indywidualne 5
Zawody drużynowe 9
Pierwszy Mecz Matematyczny 10
Drugi Mecz Matematyczny 12

Rozwiązania **14**
Zawody indywidualne 14
Zawody drużynowe 47
Pierwszy Mecz Matematyczny 56
Drugi Mecz Matematyczny 68

Regulamin Meczu Matematycznego **82**