MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ

LXIII Olimpiada Matematyczna 2011/2012

Sprawozdanie Komitetu Głównego

OLIMPIADA MATEMATYCZNA
WARSZAWA 2013

Autor rozwiązań zadań — mgr Kamil Duszenko

Recenzenci rozwiązań zadań — dr Marcin Kuczma (zadania z polskiej OM)
dr Michał Krych (pozostałe zadania)

Publikacja zawiera sprawozdanie Komitetu Głównego Olimpiady Matematycznej z przebiegu zawodów:
— LXIII Olimpiady Matematycznej (wrzesień 2011 — kwiecień 2012);
— LIII Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej (lipiec 2012);
— VI Środkowoeuropejskich Zawodów Matematycznych (wrzesień 2012)
— V Międzynarodowych Mistrzostw Rumunii w Matematyce (marzec 2012)
— XXII Zawodów Państw Bałtyckich (listopad 2011)
— I Europejskiej Olimpiady Matematycznej dla Dziewcząt (kwiecień 2012)

ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa

Skład komputerowy (systemem Latex) — Olimpiada Matematyczna

SPIS TREŚCI

LXIII Olimpiada Matematyczna 2011/2012

Sprawozdanie Komitetu Głównego

Organizacja zawodów 4
Skład osobowy komitetów Olimpiady 5
Zestawienia ocen 7
Zestawienia liczby zawodników według okręgów 8
Lista zawodników zakwalifikowanych do zawodów III stopnia 8
Lista laureatów i wyróżnionych 14
Zakończenie LXIII Olimpiady Matematycznej 15
Obóz naukowy Olimpiady Matematycznej — Mszana Dolna. Sprawozdanie 15
XII Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne. Sprawozdanie 16
Trening przed Międzynarodową Olimpiadą Matematyczną. Sprawozdanie 16
LIII Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna. Sprawozdanie 17
VI Środkowoeuropejskie Zawody Matematyczne. Sprawozdanie 18
V Międzynarodowe Mistrzostwa Rumunii w Matematyce. Sprawozdanie 19
I Europejska Olimpiada Matematyczna dla Dziewcząt. Sprawozdanie 20
XXII Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich. Sprawozdanie 20
II Olimpijskie Warsztaty dla Nauczycieli. Sprawozdanie 21
Teksty zadań 24
    Zawody pierwszego stopnia 24
    Zawody drugiego stopnia 25
    Zawody trzeciego stopnia 26
    LIII Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna 27
    VI Środkowoeuropejska Olimpiada Matematyczna 28
    V Międzynarodowe Mistrzostwa Rumunii w Matematyce 30
    I Europejska Olimpiada Matematyczna Dziewcząt 31
    XXII Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich 33
Rozwiązania zadań 36
    Zawody pierwszego stopnia 36
    Zawody drugiego stopnia 57
    Zawody trzeciego stopnia 68
    LIII Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna 82
    VI Środkowoeuropejskie Zawody Matematyczne 95
    V Międzynarodowe Mistrzostwa Rumunii w Matematyce 110
    I Europejska Olimpiada Matematyczna dla Dziewcząt 122
    XXII Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich 137

LXIII OLIMPIADA MATEMATYCZNA 2011/2012

SPRAWOZDANIE KOMITETU GŁÓWNEGO

Organizacja zawodów

W roku szkolnym 2011/2012 Komitet Główny Olimpiady Matematycznej zorganizował po raz sześćdziesiąty trzeci ogólnopolskie zawody matematyczne. Zawody pierwszego stopnia odbywały się w trzech seriach jesienią 2011 r.: pierwsza seria od 1 września do 3 października, druga od 4 października do 3 listopada, trzecia od 4 listopada do 5 grudnia 2011 r. W czasie tych zawodów uczniowie samodzielnie rozwiązywali dwanaście zadań konkursowych (po cztery w każdej serii) przygotowanych i rozesłanych do szkół oraz udostępnionych na stronie www.om.edu.pl przez Komitet Główny Olimpiady Matematycznej. Uczestnicy zawodów przesyłali swoje rozwiązania do właściwych terenowo Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej, które kwalifikowały uczniów do zawodów II stopnia.

W zawodach I stopnia uczestniczyło 1409 uczniów. Do zawodów II stopnia, które odbyły się w okręgach w dniach 17 i 18 lutego 2012 r., zakwalifikowano 622 uczniów. Każdego dnia zawodnicy rozwiązywali trzy zadania (przygotowane przez KG OM) w ciągu 5 godzin. Komitety Okręgowe oceniły rozwiązania. Po ujednoliceniu ocen w skali kraju KG zakwalifikował do zawodów III stopnia 104 osoby.

Finał LXIII OM odbył się w Kielcach w dniach 18 – 21 kwietnia 2012 r. (od środy do soboty). Zadania rozwiązywano w środę i w czwartek w w II Liceum Ogólnokształcącym im. Jana Śniadeckiego przy ul. Śniadeckich 9. Każdego dnia zawodnicy mieli 5 godzin na rozwiązanie trzech zadań przygotowanych przez KG OM. Trzeciego dnia finału odbyła się wycieczka. Z Huty Szklanej uczniowie przeszli na teren Świętokrzyskiego Parku Narodowego tzw. Drogą Królewską. Na Świętym Krzyżu zwiedzano prawie 1000-letni Klasztor, Muzeum Diecezjalne, Kościół oraz podziemia klasztorne, w których według opisu pochowany jest książę Jeremi Wiśniowiecki. Następnie odwiedzono Muzeum Świętokrzyskiego Parku Narodowego, a po zejściu do Nowej Słupi — Centrum Kulturowo–Archeologiczne, w którym odbywają się od wielu lat Dymarki Świętokrzyskie.

Uroczyste zakończenie LXIII Olimpiady Matematycznej odbyło się 21 kwietnia 2012 r. Ogólnokształcącej Szkole Muzycznej I i II stopnia im. L.Różyckiego w Kielcach przy ul. Wojewódzkiej 12. Przyznano jedną nagrodę pierwszego stopnia, dwie nagrody drugiego stopnia, sześć nagród trzeciego stopnia, piętnaście nagród czwartego stopnia i trzy wyróżnienia.

W dniach 10 — 24 czerwca 2012 r. odbył się obóz naukowy Olimpiady w ośrodku „Słoneczny” w Mszanie Dolnej

Skład osobowy komitetów Olimpiady

Komitet Główny

Przewodniczący — prof. dr hab. Rafał Latała

Zastępca przewodniczącego — doc. dr Michał Krych

Kierownik organizacyjny — Halina Małek

Członkowie: dr Jerzy Bednarczuk, dr hab. Krzysztof Chełmiński, mgr Paulina Domagalska, mgr Kamil Duszenko, prof. dr hab. Andrzej Fryszkowski, mgr Andrzej Grzesik, Michał Kieza, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak (od 24 marca 2012 r.), dr Adam Osękowski, Michał Pilipczuk, mgr Jakub Pochrybniak, dr Waldemar Pompe, dr Mariusz Skałba, dr hab. Edward Tutaj, doc. dr hab. Michał Wojciechowski, prof. dr hab. Przemysław Wojtaszczyk, dr Jarosław Wróblewski.

Komisja zadaniowa: mgr Paulina Domagalska (przewodnicząca), dr hab. Krzysztof Chełmiński, mgr Kamil Duszenko, prof. dr hab. Andrzej Fryszkowski, Michał Kieza, dr Michał Krych, dr Marcin E. Kuczma, prof. dr hab. Rafał Latała, dr hab. Hung Son Nguyen, dr Adam Osękowski, Michał Pilipczuk, dr hab. Mariusz Skałba, dr Witold Szczechla.

Biuro Komitetu Głównego

Kierownik organizacyjny — Halina Małek, główny księgowy — Małgorzata Ptaszyńska, sekretarz techniczny — Magdalena Bojarska.

Adres: Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk ul. Śniadeckich 8, pok. 314 00-956 Warszawa tel. (0-22) 52-28-224

Komitety Okręgowe

1. Komitet Okręgowy w Gdańsku

dr Marcin Szyszkowski — przewodniczący, Hanna Jabłońska — sekretarz, dr hab. Antoni Augustynowicz, dr hab. Tomasz Człapiński, mgr Adam Dzedzej, dr hab. Andrzej Nowik, mgr Bartosz Putrycz, dr Michał Stukow, dr Błażej Szepietowski, dr Barbara Wolnik.

Adres: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej Instytut Matematyczny Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk.Terenem działalności Komitetu są szkoły średnie województwa pomorskiego.

2. Komitet Okręgowy w Katowicach

prof. dr hab. Ryszard Rudnicki — przewodniczący, dr Józef Kalinowski — zastępca przewodniczącego, dr Jacek Uryga — sekretarz, dr Lech Bartłomiejczyk, dr Tomasz Kulpa, mgr Agata Nowak, dr Marek Piętka, dr Barbara Przebieracz, prof. dr hab. Wilhelmina Smajdor, mgr Tomasz Szymczyk.

Adres: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14 40-007 KatowiceTerenem działalności Komitetu są szkoły średnie województwa śląskiego.

3. Komitet Okręgowy w Krakowie

dr Krzysztof Ciesielski — przewodniczący, dr hab. Edward Tutaj, prof. UJ — zastępca przewodniczącego, mgr Joanna Meissner — sekretarz, dr Danuta Ciesielska, dr hab. Armen Edigarian prof. UJ, mgr Andrzej Grzesik, dr Witold Jarnicki, dr Marcin Kulczycki, dr Leszek Pieniążek, dr Józef Piórek, dr Lech Sławik.

Adres: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków Terenem działalności Komitetu są szkoły średnie województwa małopolskiego.

4. Komitet Okręgowy w Lublinie

dr hab. Wiesław Zięba, prof. UMCS — przewodniczący, dr Halina Hebda-Grabowska — sekretarz, dr Krzysztof Bolibok, dr Piotr Kowalski, dr Tomasz Walczyński, dr Jacek Wośko.

Adres: Zakład Rachunku Prawdopodobieństwa pok. 810, Instytut Matematyki UMCS, pl. Marii Curie-Skłodowskiej 1, 20-031 Lublin Terenem działalności Komitetu są szkoły średnie województw: lubelskiego.

5. Komitet Okręgowy w Łodzi

prof. dr hab. Wojciech Banaszczyk — przewodniczący, Danuta Marędziak — sekretarz, dr hab. Grzegorz Andrzejczak, mgr Witold Bednarek, dr hab. Andrzej Chrzęszczyk, dr Maciej Czarnecki, dr Kazimiera Dyrda, mgr Krzysztof Kamiński, dr Andrzej Komisarski, dr Wojciech Kozłowski, dr Jan Lesiak, dr Jacek Mańko, dr Kamil Niedziałomski, dr Michał Stachura, prof. dr hab. Grzegorz Świątek, dr Elżbieta Zając .

Adres: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego ul. Banacha 22, 90-238 ŁódźTerenem działalności Komitetu są szkoły średnie województw: łódzkiego i świętokrzyskiego.

6. Komitet Okręgowy w Poznaniu

dr hab. Artur Michalak — przewodniczący, mgr inż. Przemysław Grudziński — sekretarz, dr Małgorzata Bednarska, dr Joanna Berlińska, mgr Bartłomiej Bzdęga, dr Jerzy Grzybowski, dr Adrian Łydka, prof. dr hab. Tomasz Schoen .

Adres: Komitet Okregowy Olimpiady Matematycznej Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza ul. Umultowska 87, B1-21, 61-614 Poznań. Terenem działalności Komitetu są szkoły średnie województwa wielkopolskiego.

7. Komitet Okręgowy w Rzeszowie

dr hab. Jarosław Górnicki, prof. PRz — przewodniczący, mgr Celina Preis — sekretarz„ dr hab. Jacek Chudziak, dr Janusz Dronka, dr Renata Jurasińska, dr Leszek Olszowy, dr Marek Sobolewski, dr Paweł Witowicz.

Adres: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej Katedra Matematyki Politechnika Rzeszowska Al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów. Terenem działalności Komitetu są szkoły średnie województwa podkarpackiego.

8. Komitet Okręgowy w Szczecinie

dr Paweł Andrzejewski — przewodniczący, Anna Sasim — sekretarz, mgr Kamila Rybaczek, mgr Iwona Staniewska, dr Grzegorz Szkibiel, dr Lucjan Szymaszkiewicz.

Adres: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin. Terenem działalności Komitetu są szkoły średnie województw: lubuskiego i zachodniopomorskiego.

9. Komitet Okręgowy w Toruniu

prof. dr hab. Andrzej Nowicki — przewodniczący, mgr Zbigniew Bobiński — sekretarz, dr Anna Gołębiewska, dr Paweł Jarek, dr Piotr Jędrzejewicz, dr Andrzej Sendlewski, dr Mirosław Uscki.

Adres: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń Terenem działalności Komitetu są szkoły średnie województw: kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego.

10. Komitet Okręgowy w Warszawie

dr Michał Krych — przewodniczący, dr Marcin E. Kuczma — sekretarz, dr hab. Krzysztof Chełmiński, dr Paweł Goldstein, doc. dr hab. Wojciech Guzicki, Jacek Jendrej (student), Marcin Kotowski (student), Michał Kotowski (student), dr Mikołaj Rotkiewicz, dr hab. Paweł Strzelecki, prof UW, dr Alina Haman — członek honorowy.

Adres: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, Instytut Matematyczny PAN ul. Śniadeckich 8, 00-956 Warszawa.Terenem działalności Komitetu są szkoły średnie województw: mazowieckiego i podlaskiego.

11. Komitet Okręgowy we Wrocławiu

dr hab. Tadeusz Pezda — przewodniczący, dr Witold Seredyński — sekretarz, dr Katarzyna Dymara, dr Tomasz Elsner, dr Liliana Janicka, dr Jan Kowolik, dr Mateusz Kwaśnicki, Michał Marcinkowski, mgr Bogusław Merdas, dr Bogdan Pawlik .

Adres: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław. Terenem działalności Komitetu są szkoły średnie województw: dolnośląskiego i opolskiego.

LXIII Olimpiada Matematyczna

Zestawienie ocen rozwiązań zadań zawodów I stopnia

	ogółem	Liczba rozwiązań											
		Numer zadania											
		1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
Razem	10403	1333	1102	1180	1092	981	886	765	613	995	802	206	448
6 pkt.	5485	736	575	993	647	449	496	171	206	763	261	23	165
5 pkt.	1177	231	103	83	134	137	98	70	18	123	117	6	57
2 pkt.	1227	172	130	8	79	162	137	157	83	60	166	28	45
0 pkt.	2514	194	294	96	232	233	155	367	306	49	258	149	181

Zestawienie ocen rozwiązań zadań zawodów II stopnia

	ogółem	Liczba rozwiązań					
		Dzień pierwszy			Dzień drugi		
		Numer zadania					
		1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Razem	3660	610	610	610	610	610	610
6 punktów	789	185	72	180	157	70	125
5 punktów	154	44	8	33	27	5	37
2 punkty	132	42	16	26	28	7	13
0 punktów	2585	339	514	371	398	528	435

Zestawienie ocen rozwiązań zadań zawodów III stopnia

	ogółem	Liczba rozwiązań					
		Dzień pierwszy			Dzień drugi		
		Numer zadania					
		1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Razem	624	104	104	104	104	104	104
6 punktów	146	50	10	11	52	20	3
5 punktów	50	18	5	3	23	1	0
2 punkty	19	13	3	1	2	0	0
0 punktów	409	23	86	89	27	83	101

Zestawienie liczby zawodników według okręgów

Okręg	Zawody			Laureaci	Wyróżnieni
	I st.	II st.	III st.		
POLSKA	1409	622	104	24	3
gdański	69	30	3	0	0
katowicki	139	70	13	1	0
krakowski	160	81	16	2	1
lubelski	60	30	0	0	0
łódzki	83	35	3	2	0
poznański	63	27	3	1	0
rzeszowski	125	60	8	3	0
szczeciński	101	40	4	1	0
toruński	155	72	6	1	1
warszawski	312	118	33	10	0
wrocławski	142	59	15	3	1

Lista uczestników zakwalifikowanych do zawodów stopnia trzeciego

1. Grzegorz Adamski — uczeń klasy pierwszej Liceum nr 1 w Zespole Szkół nr 1 w Szamotułach. Nauczycielki zawodnika: Hanna Łuczak, Ryszarda Mazur i Grażyna Skórnicka
2. Aleksander Antasik — uczeń klasy trzeciej Liceum Ogólnokształcącego nr III im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu. Nauczyciele zawodnika: Przemysław Szczepaniak i Agnieszka Kazun
3. Bartłomiej Bancerek — uczeń klasy trzeciej I Liceum Ogólnokształcącego im. Adama Mickiewicza w Białymstoku. Nauczyciele zawodnika: Małgorzata Pawłowska-Leoniuk i Joachim Jelisiejew
4. Adam Baranowski — uczeń klasy trzeciej I Liceum Ogólnokształcącego im. Marii Skłodowskiej-Curie w Sopocie. Nauczycielka zawodnika: Barbara Maj
5. Grzegorz Białek — uczeń klasy trzeciej VI Liceum Ogólnokształcącego im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy. Nauczyciele zawodnika: Mieczysława Wierzbicka, Henryk Pawłowski i Piotr Jędrzejewicz
6. Jakub Bieńczyk — uczeń klasy trzeciej Liceum Ogólnokształcącego nr III im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu. Nauczyciele zawodnika: Przemysław Szczepaniak i Agnieszka Kazun
7. Łukasz Bożyk — uczeń klasy pierwszej VI Liceum Ogólnokształcącego im. Tadeusza Reytana w Warszawie. Nauczycielki zawodnika: Maria Narewska i Joanna Sadlej
8. Paweł Brysch — uczeń klasy drugiej II Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Tarnowskich Górach. Nauczycielka zawodnika: Jolanta Marzec
9. Dominik Burek — uczeń klasy trzeciej III Liceum Ogólnokształcącego im. Adama Mickiewicza w Tarnowie. Nauczycielka zawodnika: Małgorzata Godek

10. Piotr Cholewa — uczeń klasy trzeciej IV Liceum Ogólnokształcącego im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu. Nauczyciel zawodnika: Henryk Pawłowski
11. Albert Citko — uczeń klasy pierwszej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Jerzy Konarski i Waldemar Pompe
12. Tomasz Cwielung — uczeń klasy trzeciej VIII Liceum Ogólnokształcącego im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach. Nauczyciele zawodnika: Renata Suchanek, Krystyna Skórnik i Michał Rał
13. Kamil Dębowski — uczeń klasy drugiej I Liceum Ogólnokształcącego w Suwałkach. Nauczyciel zawodnika: Jan Żukowski
14. Bartłomiej Dudek — uczeń klasy trzeciej Liceum Ogólnokształcącego nr XIV im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu. Nauczyciele zawodnika: Stefan Mizia i Jan Dymara
15. Maciej Dulęba — uczeń klasy trzeciej Liceum Ogólnokształcącego nr XIV im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu. Nauczyciele zawodnika: Stefan Mizia i Jan Dymara
16. Nikolaos Dymitriadis — uczeń klasy trzeciej Liceum Ogólnokształcącego nr XIII w Szczecinie. Nauczycielka zawodnika: Beata Bogdańska
17. Filip Ficek — uczeń klasy trzeciej V Liceum Ogólnokształcącego im. Augusta Witkowskiego w Krakowie. Nauczyciel zawodnika: Jacek Dymel
18. Stanisław Frejlak — uczeń klasy trzeciej Katolickiego Gimnazjum nr 15 im. Ks. Jerzego Popiełuszki w Warszawie. Nauczycielka zawodnika: Dagna Kownacka
19. Marcin Fryz — uczeń klasy trzeciej III Liceum Ogólnokształcącego im. Adama Mickiewicza w Katowicach. Nauczycielka zawodnika: Bożena Spyra
20. Michał Gieleciak — uczeń klasy trzeciej V Liceum Ogólnokształcącego w Bielsku-Białej. Nauczyciele zawodnika: Bogusław Gardaś i Tomasz Szymczyk
21. Michał Glapa — uczeń klasy pierwszej V Liceum Ogólnokształcącego im. Augusta Witkowskiego w Krakowie. Nauczyciele zawodnika: Bogusław Kraszewski i Jacek Dymel
22. Grzegorz Głuch — uczeń klasy trzeciej Liceum Ogólnokształcącego nr 3 im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu. Nauczyciele zawodnika: Przemysław Szczepaniak, Włodzimierz Mizia i Agnieszka Kazun
23. Mateusz Gołębiewski — uczeń klasy trzeciej Liceum Ogólnokształcącego nr XIV im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu. Nauczyciel zawodnika: Sebastian Guz
24. Jan Gwinner — uczeń klasy pierwszej V Liceum Ogólnokształcącego im. Augusta Witkowskiego w Krakowie. Nauczyciele zawodnika: Bogusław Kraszewski Barbara i Kaim-Gwinner
25. Agnieszka Hejna — uczennica klasy trzeciej Liceum Ogólnokształcącego nr XIV im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu. Nauczyciele zawodnika: Stefan Mizia i Jan Dymara
26. Anna Hoduń — uczennica klasy pierwszej V Liceum Ogólnokształcącego im. Augusta Witkowskiego w Krakowie. Nauczyciel zawodnika: Jacek Dymel
27. Tomasz Jakubek — uczeń klasy trzeciej V Liceum Ogólnokształcącego im. Augusta Witkowskiego w Krakowie. Nauczyciel zawodnika: Jacek Dymel
28. Katarzyna Janocha — uczennica klasy trzeciej V Liceum Ogólnokształące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie. Nauczyciel zawodnika: Jacek Dymel

29. Teodor Jerzak — uczeń klasy trzeciej IV Liceum Ogólnokształcącego im. Mikołaja Kopernika w Rzeszowie. Nauczyciel zawodnika: Wiesław Gajdek
30. Zbigniew Juszkiewicz — uczeń klasy drugiej XIII Liceum Ogólnokształcącego w Szczecinie. Nauczycielki zawodnika: Beata Bogdańska i Agnieszka Łuszczek
31. Patryk Kajdas — uczeń klasy trzeciej Liceum Ogólnokształcącego im. mjr. Henryka Sucharskiego w Myszkowie. Nauczyciel zawodnika: Jarosław Grygiel
32. Karol Kaszuba — uczeń klasy pierwszej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Waldemar Pompe i Jerzy Konarski
33. Piotr Kawałek — uczeń klasy trzeciej Liceum Ogólnokształcącego im. Jana Pawła II Sióstr Prezentek w Rzeszowie. Nauczyciel zawodnika: Mariusz Kraus
34. Krzysztof Kiewicz — uczeń klasy trzeciej VIII Liceum Ogólnokształcącego im. Króla Władysława IV w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Waldemar Pałuba i Małgorzata Dąbrowska
35. Krzysztof Kleiner — uczeń klasy trzeciej V Liceum Ogólnokształcącego im. Augusta Witkowskiego w Krakowie. Nauczyciele zawodnika: Jacek Dymel, Tomasz Lenarcik i Tomasz Warszawski
36. Michał Kliś — uczeń klasy trzeciej Liceum Ogólnokształcącego im. Jana Pawła II Sióstr Prezentek w Rzeszowie. Nauczyciel zawodnika: Mariusz Kraus
37. Maciej Kolanowski — uczeń klasy pierwszej VIII Liceum Ogólnokształcącego im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Nauczycielka zawodnika: Agnieszka Wanot
38. Paweł Komorowski — uczeń klasy trzeciej II Liceum Ogólnokształcącego im. ks. Anny z Sapiehów Jabłonowskiej w Białymstoku. Nauczycielka zawodnika: Agnieszka Pawluczuk
39. Cezary Kosko — uczeń klasy trzeciej XIII Liceum Ogólnokształcącego w Szczecinie. Nauczyciele zawodnika: Beata Bogdańska, Łukasz Maczan i Adam Neugebauer
40. Igor Kotrasiński — uczeń klasy drugiej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Wiktor Bartol, Jerzy Bednarczuk i Edward Stachowski
41. Filip Kowalski — uczeń klasy trzeciej III Liceum Ogólnokształcącego im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni. Nauczyciel zawodnika: Witold Zakrzacki
42. Sławomir Kubicki — uczeń klasy drugiej I Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Dubois w Koszalinie. Nauczyciel zawodnika: Paweł Rudecki
43. Paweł Kura — uczeń klasy trzeciej VIII Liceum Ogólnokształcącego im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach. Nauczycielki zawodnika: Krystyna Skórnik i Renata Suchanek
44. Marcin Kurka — uczeń klasy trzeciej VIII Liceum Ogólnokształcącego im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach. Nauczycielki zawodnika: Krystyna Skórnik i Renata Suchanek
45. Wiktor Kuropatwa — uczeń klasy trzeciej V Liceum Ogólnokształcącego im. Augusta Witkowskiego w Krakowie. Nauczyciel zawodnika: Jacek Dymel
46. Agata Latacz — uczennica klasy trzeciej V Liceum Ogólnokształcącego im. Augusta Witkowskiego w Krakowie. Nauczyciele zawodnika: Jacek Dymel, Bogusław Kraszewski i Tomasz Lenarcik
47. Krzysztof Lech — uczeń klasy trzeciej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciel zawodnika: Wojciech Martys

48. Łukasz Łabęcki — uczeń klasy drugiej Zespołu Szkół Ogólnokształcących nr 6 w Bydgoszczy. Nauczyciele zawodnika: Ewa Ludwikowska, Henryk Pawłowski i Piotr Jędrzejewicz

49. Adam Malinowski — uczeń klasy trzeciej Liceum Ogólnokształcącego nr III im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu. Nauczyciel zawodnika: Przemysław Szczepaniak

50. Karol Marcinkowski — uczeń klasy drugiej I Społecznego Liceum Ogólnokształcącego w Tarnobrzegu. Nauczyciel zawodnika: Paweł Dobrowolski

51. Dariusz Matlak — uczeń klasy trzeciej II Liceum Ogólnokształcącego im. Króla Jana III Sobieskiego w Krakowie. Nauczyciel zawodnika: Michał Rybka

52. Aleksander Matusiak — uczeń klasy drugiej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Wiktor Bartol, Jerzy Bednarczuk i Edward Stachowski

53. Jacek Moszkowski — uczeń klasy trzeciej Liceum Ogólnokształcącego nr III we Wrocławiu. Nauczyciele zawodnika: Przemysław Szczepaniak i Agnieszka Kazun

54. Barbara Mroczek — uczennica klasy drugiej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Wiktor Bartol, Jerzy Bednarczuk i Edward Stachowski

55. Jakub Mrożek — uczeń klasy drugiej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Wiktor Bartol, Jerzy Bednarczuk i Edward Stachowski

56. Konrad Myszkowski — uczeń klasy trzeciej V Liceum Ogólnokształcącego im. Augusta Witkowskiego w Krakowie. Nauczyciele zawodnika: Tadeusz Matusz, Bogusław Kraszewski i Jacek Dymel

57. Wojtek Nadara — uczeń klasy trzeciej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Leszek Sidz i Konrad Pióro

58. Adam Nałęcz-Jawecki — uczeń klasy trzeciej Społecznego Gimnazjum nr 1 STO im. Jana Nowaka-Jeziorańskiego w Warszawie. Nauczycielka zawodnika: Danuta Jóźwicka-Lamparska

59. Paweł Nałęcz-Jawecki — uczeń klasy drugiej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Wiktor Bartol, Jerzy Bednarczuk i Edward Stachowski

60. Jakub Nowak — uczeń klasy drugiej II Liceum Ogólnokształcącego im. Króla Jana III Sobieskiego w Krakowie. Nauczyciel zawodnika: Michał Rybka

61. Anna Olech — uczennica klasy drugiej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Wiktor Bartol i Jerzy Bednarczuk

62. Maciej Olejnik — uczeń klasy trzeciej II Liceum Ogólnokształcącego z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Stefana Batorego w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Mirosława Kurkierewicz i Joanna Jaszuńska

63. Kajetan Ożarowski — uczeń klasy drugiej Liceum Ogólnokształcącego nr XIV im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu. Nauczyciele zawodnika: Tomasz Elsner, Daniel Cichoń i Marcin Preisner

64. Konrad Jan Paluszek — uczeń klasy trzeciej Gimnazjum z Oddziałami Dwujęzycznymi nr 42 w Warszawie. Nauczycielka zawodnika: Maria Mędrzycka

65. Piotr Pawlak — uczeń klasy ósmej Ogólnokształcąca Szkoła Muzyczna I i II stopnia im. Feliksa Nowowiejskiego w Gdańsku. Nauczycielka zawodnika: Katarzyna Żebrowska
66. Marcin Płatek — uczeń klasy trzeciej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciel zawodnika: Konrad Pióro
67. Sebastian Pogorzelski — uczeń klasy trzeciej I Liceum Ogólnokształcącego im. Adama Mickiewicza w Białymstoku. Nauczyciele zawodnika: Małgorzata Pawłowska-Leoniuk i Joachim Jelisiejew
68. Paweł Popławski — uczeń klasy trzeciej Liceum Ogólnokształcace nr III im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu. Nauczyciele zawodnika: Agnieszka Kazun i Przemysław Szczepaniak
69. Artur Pragacz — uczeń klasy drugiej I Liceum Ogólnokształcącego im. Stefana Żeromskiego w Kielcach. Nauczycielka zawodnika: Katarzyna Stolarczyk
70. Krzysztof Pszeniczny — uczeń klasy trzeciej Liceum Ogólnokształcącego im. Jana Pawła II Sióstr Prezentek w Rzeszowie. Nauczyciel zawodnika: Mariusz Kraus
71. Jakub Radzicki — uczeń klasy trzeciej II Liceum Ogólnokształcącego im. K. I. Gałczyńskiego w Olsztynie. Nauczycielki zawodnika: Ewa Ziętek Anna Jakubowska
72. Andrzej Rumiński — uczeń klasy trzeciej Liceum Akademickiego w Zespole Szkół Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu. Nauczycielki zawodnika: Anna Gołębiewska i Anna Jakubowska
73. Damian Rupar — uczeń klasy trzeciej Liceum Ogólnokształcącego im. Jana Pawła II Sióstr Prezentek w Rzeszowie. Nauczyciel zawodnika: Mariusz Kraus
74. Wojciech Rybak — uczeń klasy drugiej Liceum Ogólnokształcącego im. Jana Pawła II Sióstr Prezentek w Rzeszowie. Nauczyciel zawodnika: Mariusz Kraus
75. Kamil Rychlewicz — uczeń klasy pierwszej I Liceum Ogólnokształcącego im. Mikołaja Kopernika w Łodzi. Nauczyciel zawodnika: Andrzej Komisarski
76. Radek Rzepliński — uczeń klasy drugiej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Wiktor Bartol, Jerzy Bednarczuk i Edward Stachowski
77. Janusz Schmude — uczeń klasy trzeciej IV Liceum Ogólnokształcącego Zespołu Szkół Ogólnokształcących nr 4 im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu. Nauczyciel zawodnika: Henryk Pawłowski
78. Radosław Serafin — uczeń klasy drugiej III Liceum Ogólnokształcącego im Adama Mickiewicza we Wrocławiu. Nauczyciele zawodnika: Przemysław Szczepaniak i Włodzimierz Mizia
79. Michał Seweryn — uczeń klasy trzeciej V Liceum Ogólnokształcącego im. Augusta Witkowskiego w Krakowie. Nauczyciel zawodnika: Jacek Dymel i Bogusław Kraszewski
80. Anna Siennicka — uczennica klasy trzeciej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Leszek Sidz i Wojciech Martys
81. Jakub Skorupski — uczeń klasy pierwszej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Jerzy Konarski i Waldemar Pompe

82. Mateusz Skórski — uczeń klasy trzeciej I Liceum Ogólnokształcącego im. Stefana Żeromskiego w Jeleniej Górze. Nauczyciele zawodnika: Sławomir Wiśniewski i Iwona Hajder
83. Marcin Smulewicz — uczeń klasy trzeciej Liceum Ogólnokształcącego im. Bolesława Prusa W Skierniewicach. Nauczycielka zawodnika: Jolanta Sukiennik
84. Marek Sokołowski — uczeń klasy pierwszej I Liceum Ogólnokształcącego im. Tadeusza Kościuszki w Łomży. Nauczyciel zawodnika: Piotr Łowicki
85. Leszek Sołdan — uczeń klasy drugiej Gimnazjum z Oddziałami Dwujęzycznymi nr 42 w Warszawie. Nauczycielka zawodnika: Maria Mędrzycka
86. Marek Sommer — uczeń klasy drugiej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Jerzy Konarski, Filip Smentek i Edward Stachowski
87. Krzysztof Stanisławek — uczeń klasy drugiej Liceum Ogólnokształcącego nr 6 im. Jana Kochanowskiego w Radomiu. Nauczyciel zawodnika: Przemysław Murawski
88. Jakub Staroń — uczeń klasy pierwszej V Liceum Ogólnokształcącego w Bielsku-Białej. Nauczyciel zawodnika: Tomasz Szymczyk
89. Juliusz Straszyński — uczeń klasy trzeciej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciel zawodnika: Konrad Pioro
90. Jakub Supeł — uczeń klasy trzeciej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Waldemar Pompe i Jerzy Konarski
91. Sylwester Swat — uczeń klasy trzeciej I Liceum Ogólnokształcącego im. Karola Marcinkowskiego w Poznaniu. Nauczyciel zawodnika: Tomasz Gronek
92. Tomasz Syposz — uczeń klasy drugiej Liceum Ogólnokształcącego nr XIV im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu. Nauczyciele zawodnika: Stefan Mizia i Tomasz Elsner
93. Jakub Śliwiński — uczeń klasy trzeciej I Liceum Ogólnokształcącego im. Bolesława Prusa w Siedlcach. Nauczycielka zawodnika: Teresa Nasiłowska
94. Kacper Świerzowicz — uczeń klasy trzeciej Liceum Ogólnokształcącego im. Jana Pawła II Sióstr Prezentek w Rzeszowie. Nauczyciel zawodnika: Mariusz Kraus
95. Bartosz Tarnawski — uczeń klasy trzeciej Katolickiego Liceum Ogólnokształcącego im. bł. ks. E. Szramka w Katowicach. Nauczycielka zawodnika: Anna Mazik
96. Wojciech Tobiś — uczeń klasy trzeciej I Liceum Ogólnokształcącego im. Lotników Polskich w Oleśnie. Nauczyciel zawodnika: Waldemar Górski
97. Wojciech Waniek — uczeń klasy drugiej VIII Liceum Ogólnokształcącego im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach. Nauczycielki zawodnika: Renata Suchanek i Danuta Szczerek
98. Michał Zając — uczeń klasy trzeciej V Liceum Ogólnokształcącego im. Augusta Witkowskiego w Krakowie. Nauczyciel zawodnika: Jacek Dymel
99. Bartłomiej Zawalski — uczeń klasy trzeciej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Wojciech Martys i Leszek Sidz
100. Artur Ziarnik — uczeń klasy trzeciej I Liceum Ogólnokształcącego im. Leona Kruczkowskiego w Tychach. Nauczycielka zawodnika: Jolanta Batko
101. Marcel Zięba — uczeń klasy trzeciej Liceum Ogólnokształcącego nr II im. Czesława Miłosza w Jaworznie. Nauczycielka zawodnika: Danuta Mazur

102. Michał Ziobro — uczeń klasy drugiej V Liceum Ogólnokształcącego im. Augusta Witkowskiego w Krakowie. Nauczyciel zawodnika: Jacek Dymel

103. Bartłomiej Żak — uczeń klasy drugiej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciel zawodnika: Jerzy Konarski

104. Michał Żurek — uczeń klasy trzeciej VIII Liceum Ogólnokształcącego im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach. Nauczycielki zawodnika: Renata Suchanek i Krystyna Skórnik

Lista laureatów i wyróżnionych

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na posiedzeniu w dniu 20 kwietnia 2012 r. przyznał dwudziestu czterem osobom tytuł laureata oraz nagrody pierwszego, drugiego, trzeciego i czwartego stopnia. Otrzymali je następujący zawodnicy (w nawiasie podano liczbę uzyskanych punktów na 36 punktów możliwych do uzyskania):

nagroda pierwszego stopnia

1. Maciej Dulęba (36)

nagrody drugiego stopnia

2 – 3. Igor Kotrasiński (30)
Wojciech Nadara (30)

nagrody trzeciego stopnia

4. Łukasz Bożyk(26)
5 – 7. Grzegorz Białek (24)
Karol Kaszuba (24)
Michał Zając(24)
8 – 9. Paweł Nałęcz–Jawecki (23)
Michał Seweryn (23)

nagrody czwartego stopnia

10. Damian Rupar (19)
11 – 18. Teodor Jerzak (18)
Sławomir Kubicki (18)
Adam Malinowski (18)
Barbara Mroczek (18)
Anna Olech (18)
Konrad Jan Paluszek (18)
Kamil Rychlewicz (18)
Bartłomiej Żak (18)
19 – 22. Paweł Kura (17)
Anna Siennicka (17)
Marcin Smulewicz (17)
Kacper Świerzowicz (17)
23. Grzegorz Adamski (16)
24. Kajetan Ożarowski(15)

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na tym samym posiedzeniu postanowił wyróżnić 3 zawodników:

25 – 27. Grzegorz Głuch (14)
Janusz Schmude (14)
Michał Ziobro (14)

Nagrodę im. Andrzeja Mąkowskiego za najlepiej zredagowane poprawne rozwiązanie jednego z zadań z finału LXIII Olimpiady Matematycznej otrzymali następujący uczniowie:
Damian Rupar (zadanie 6), Marcin Smulewicz (zadanie 2) i Bartłomiej Zawalski (zadanie 3).

Zakończenie LXIII Olimpiady Matematycznej

Finał LXIII Olimpiady Matematycznej trwał łącznie od 18 do 21 kwietnia 2012 r. Zawody odbywały się w salach w II Liceum Ogólnokształcącym im. J.Śniadeckiego w Kielcach. Uczestnicy finału LXIII Olimpiady Matematycznej, ich opiekunowie oraz członkowie Komitetu Głównego zostali zakwaterowani w hotelu Ameliówka, około 15 km od centrum Kielc. Uczestnicy przyjeżdżali na miejsce zawodów we wtorek 17 kwietnia, by w środę i czwartek rozwiązywać zadania (po trzy każdego dnia). Każdego dnia zawodów, po obiedzie, w czasie spotkania zawodników, ich opiekunów i członków Komitetu Głównego omawiano szczegółowo rozwiązania zadań. W czasie zawodów odbyły się wykłady dla opiekunów oraz miejscowych nauczycieli. W piątek, w czasie sprawdzania zadań, uczniowie i ich opiekunowie pojechali na wycieczkę.

Uroczyste zakończenie LXIII Olimpiady Matematycznej miało miejsce 21 kwietnia Matematycznej w auli Państwowej Szkoły Muzycznej I i II stopnia im.Ludomira Różyckiego w Kielcach.. Odbył się krótki koncert w wykonaniu uczniów Szkoły. Byli obecni przedstawiciele władz miasta, przedstawiciele lokalnych władz i firm wspierających zawody. Przewodniczący Komitetu Głównego podsumował przebieg zawodów i ogłosił wyniki LXIII Olimpiady Matematycznej. Wręczył dyplomy i nagrody przyznane przez KG OM. Pieniądze na nagrody pochodziły z funduszy MEN. Dodatkowe nagrody rzeczowe ufundowały organizacje i firmy wspierające Olimpiadę. Zostały ogłoszone składy polskich delegacji na zawody międzynarodowe. Odczytano listę zawodników powołanych na obóz naukowy w Mszanie Dolnej. Nagrody im. Andrzeja Mąkowskiego wręczył prof. dr hab. Rafał Latała wraz z Krzysztofem Mąkowskim, synem Andrzeja Mąkowskiego.

Komitet Główny OM bardzo dziękuje wszystkim osobom, które wsparły organizację finału:

— Wojciechowi Lubawskiemu, Prezydentowi Miasta Kielce,
— Mieczysławowi Tomali, Dyrektorowi Wydziału Edukacji, Kultury i Sportu Urzędu Miasta Kielce,
— dr Elżbiecie Zając wicedyrektorowi Instytutu Matematyki Uniwersytetu im. Jana Kochanowskiego w Kielcach,
— Arturowi Jaroniowi, Dyrektorowi Państwowej Szkoły Muzycznej I i II stopnia w Kielcach,
— Bożenie Potockiej Dyrektorowi II Liceum Ogólnokształcącego im. Jana Śniadeckiego w Kielcach

oraz firmom, które ufundowały nagrody dla zwycięzców Olimpiady:

— Qumak–Sekom SA
— Simple SA.

Obóz naukowy Olimpiady Matematycznej — Mszana Dolna

Sprawozdanie

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej odbył się w dniach 10-24 czerwca w Mszanie Dolnej, w ośrodku „Słoneczny". Kadrę obozu stanowili: Kamil Duszenko, Andrzej Grzesik, Teodor Jerzak, Michał Kieza, Tomasz Kobos oraz Joanna Ochremiak. Ponadto z gościnnymi wykładami wystąpili Michał Pilipczuk i Przemysław Mazur. W dniach 11, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 21 i 22 czerwca odbyły się zawody indywidualne, 20 czerwca miały miejsce zawody drużynowe, a 16 i 23 czerwca rozegrane zostały mecze matematyczne. Podczas zawodów indywidualnych uczestnicy mieli cztery i pół godziny na rozwiązanie czterech zadań. Zawody drużynowe polegały na rozwiązywaniu przez kilkuosobowe drużyny czterech zadań i trwały od rana do wieczora, a mecz matematyczny od wieczora dnia poprzedniego do popołudnia. W ramach zawodów indywidualnych można było uzyskać 216 punktów. Trzy najlepsze wyniki to 154, 126 i 115 punktów. W czasie obozu odbyły się dwie wycieczki: 17 czerwca na Ćwilin oraz 20 czerwca do Rabki-Zdroju i na Luboń Wielki.

W ramach zawodów indywidualnych można było uzyskać 216 punktów. Trzy najlepsze wyniki to 146, 134 i 132 punkty. Szczegóły można znaleźć w zeszycie z tego obozu. 12 czerwca odbyła się piesza wycieczka na Turbacz, natomiast 15 czerwca odbyła się wycieczka do Zakopanego, gdzie uczestnicy podzielili się na dwie grupy, z których jedna pozostała w mieście, a druga dotarła do Czarnego Stawu Gąsienicowego.

Zeszyty z tego i z poprzednich Obozów Naukowych Olimpiady Matematycznej, zawierające wszystkie zadania z obozu oraz szkice ich rozwiązań, znajdują się na stronie internetowej Olimpiady Matematycznej: www.om.edu.pl.

Andrzej Grzesik, kierownik obozu

XII Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne

Sprawozdanie

Od 2001 roku rozgrywane są Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne. W zawodach tych uczestniczą uczniowie, którzy weszli w skład delegacji tych krajów na Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną. Uczestnicy zawodów, podobnie jak na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej, w ciągu dwóch kolejnych dni rozwiązują po 3 zadania, na co mają 270 minut każdego dnia. Za każde zadanie mogą uzyskać do 7 punktów.

XII Zawody odbyły się w dniach 24-27 czerwca 2012 r. Uczestnicy i opiekunowie zakwaterowani byli w hotelu górskim na przełęczy Fačkovské sedlo, na Słowacji. Warunki zakwaterowania i wyżywienia były bardzo dobre. W ramach czasu wolnego zorganizowano wycieczkę na górę K-ak. Polską ekipę stanowili uczniowie:

Grzegorz Białek,	Łukasz Bożyk,
Maciej Dulęba,	Igor Kotrasiński,
Wojciech Nadara,	Michał Zając.

Opiekunami polskiej ekipy byli: Andrzej Grzesik z Uniwersytetu Jagiellońskiego oraz Joanna Ochremiak z Instytutu Matematycznego PAN.

Zadania były oceniane przez międzynarodowe jury, w skład którego wchodzili opiekunowie wszystkich trzech zespołów.

W zawodach brały udział reprezentacje trzech krajów: Czech, Polski i Słowacji. Ekipy liczyły po 6 uczniów (urodzonych nie wcześniej niż w 1994 roku) i po 2 – 3 opiekunów. W dniach 24 i 25 czerwca 2012 r. odbyły się zawody indywidualne. Do rozwiązania były po trzy zadania oceniane w skali od 0 do 7 punktów. Treści zadań uczniowie dostawali w dwóch wersjach językowych: ojczystym oraz w języku angielskim jako oficjalnym języku zawodów. Natomiast rozwiązania oddawali w języku ojczystym. Opiekunowie z poszczególnych krajów oceniali prace swoich uczniów i następnie miedzynarodowe jury ujednoliciło oceny.

Nasi uczniowie osiągneli następujące wyniki:

Wojciech Nadara	— 2 miejsce, 35 p.	Michał Zając	— 3 miejsce, 31 p.
Maciej Dulęba	— 4 miejsce, 27 p.	Igor Kotrasiński	— 7 miejsce, 22 p.
Grzegorz Białek	— 9 miejsce, 19 p.	Łukasz Bożyk	— 10 miejsce, 16 p.

Wyniki uzyskane przez naszych uczniów należy uznać za bardzo dobre. W klasyfikacji drużynowej, tworzonej na podstawie sumy punktów uzyskanych w zawodach indywidualnych, Polacy zajęli zdecydowane pierwsze miejsce zdobywając 150 punktów, przy 129 punktach Słowacji i 88 punktach Czech.

Zadania z tych zawodów można znaleźć w broszurze z Obozu Naukowego Olimpiady Matematycznej, której wersja elektroniczna jest opublikowana na stronie internetowej: www.om.edu.pl/

Andrzej Grzesik, przewodniczący polskiej delegacji

Trening przed Międzynarodową Olimpiadą Matematyczną

Sprawozdanie

W dniach 3-7 lipca 2012 roku w Warszawie odbył się obóz, którego celem było potrenowanie przed Międzynarodową Olimpiadą Matematyczną. W obozie wzięli udział reprezentanci Poliski na 53. Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną, która odbyła się w lipcu w Mar del Plata, w Argentynie.

Byli to Łukasz Bożyk, Maciej Dulęba, Karol Kaszuba, Igor Kotrasiński, Wojciech Nadara oraz Michał Zając. Kadrę obozu stanowili Przemysław Mazur, Hung Son Nguyen i Adam Osękowski.

Każdego dnia uczestnicy mieli do rozwiązania po 3 zadania w czasie 4,5 godziny. Mieli więc tyle czasu, ile na Olimpiadzie Międzynarodowej. Zawody odbywały się na Instytucie Matematycznym PAN, który udostępnił nam salę. Zadania, ich trudność i sposób oceniania miały w jak największym stopniu przypominać zawody MOM. Kadra codziennie oceniała rozwiązania w skali 0 – 7 punktów. Każdego popołudnia omawiano zadania komentując możliwą strategię w czasie zawodów w oparciu o doświadczenia kadry z Olimpiad Międzynarodowych.

Najwięcej punktów uzyskał Michał Zając (72), potem kolejno Wojciech Nadara (60), Maciej Dulęba (54), Karol Kaszuba (42) i Igor Kotrasiński (42) oraz Łukasz Bożyk (17). Warto podkreślić, że niestaranny opis był traktowany ostrzej niż na Olimpiadzie Międzynarodowej, co było to jednym z elementów treningu.

Uczestnicy i kadra spoza Warszawy byli zakwaterowani w Domu Studenta Nr 2 zwanym „Żwirek”. Wyżywienie zapewniła jadłodajnia w Gmachu Głównym Politechniki Warszawskiej.

Przemysław Mazur, kierownik obozu

LIII Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna

Sprawozdanie

W dniach 4-16 lipca 2012 r. Mar del Plata w Argentynie odbyła się LIII Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna. Wzięło w niej udział 548 uczniów ze 100 krajów świata. W skład polskiej delegacji weszli

dr Waldemar Pompe (przewodniczący delegacji),
mgr Andrzej Grzesik (zastępca przewodniczącego delegacji) i uczniowie:
Łukasz Bożyk,
Maciej Dulęba,
Karol Kaszuba,
Igor Kotrasiński,
Wojciech Nadara,
Michał Zając.

Każdy kraj reprezentowało maksymalnie 6 uczniów. Międzynarodowe Jury zawodów, w skład którego weszli przewodniczący wszystkich delegacji, obradowało w dniach 5 — 8 lipca. Zapoznało się ono z nadesłanymi przez uczestniczące kraje propozycjami zadań. Po dyskusji wybrano sześć zadań konkursowych. Potem przewodniczący delegacji przetłumaczyli treści zadań na języki macierzyste uczestników. Zawody odbyły się w dniach 10 i 11 lipca. Każdego dnia uczniowie rozwiązywali w ciągu 4,5 godziny trzy zadania. W dniach 12 — 14 lipca oceniono prace wszystkich uczestników. Za rozwiązanie każdego zadania uczestnik uzyskiwał maksymalnie 7 punktów. Jury postanowiło przyznać wszystkim uczestnikom, którzy uzyskali co najmniej 28 punktów złoty medal; uczniów z wynikiem od 21 do 27 punktów nagrodzono srebrnym medalem, a zawodników z punktacją od 14 do 20 punktów — brązowym.

Wszyscy reprezentanci naszego kraju zdobyli medale. Najlepszy wynik uzyskali Maciej Dulęba oraz Wojciech Nadara. Każdy z nich zdobył 25 punktów oraz srebrny medal. Pozostali uczniowie wywalczyli brązowe medale: Michał Zając (19 punktów), Łukasz Bożyk (18 punktów), Karol Kaszuba (18 punktów) i Igor Kotrasiński (14 punktów). W nieoficjalnej klasyfikacji drużynowej Polska z sumą 119 punktów zajęła 18 miejsce. Niespodzianką było zwycięstwo Korei Południowej (209 punktów) przed Chinami (195 punktów), Stanami Zjednoczonymi (194 punkty) i Rosją (177 punktów). Szczegółowe wyniki można znaleźć na oficjalnej stronie internetowej Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej: http://www.imo-official.org.

Wyniki naszych uczniów należy uznać za bardzo dobre. Pomimo iż zadania okazały się bardzo trudne (tylko jeden zawodnik, Jeck Lim z Singapuru, uzyskał maksymalną liczbę 42 punktów), wszyscy nasi reprezentanci zdobyli medale. Miejsce w drugiej dziesiątce (18-ste) w nieoficjalnym zestawieniu drużynowym, na 100 uczestniczących krajów świata, należy uznać za bardzo dobre. Spośród krajów Unii Europejskiej jedynie Rumunia zajęła wyższą pozycję. Niemcy, Bułgaria czy Węgry, które na ogół wypadają znacznie lepiej niż Polska, tym razem uzyskały mniej punktów.

Zakres merytoryczny Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej jest od lat niezmienny i został ugruntowany przez długoletnią tradycję. Pokrywa się z on z programem merytorycznym olimpiad matematycznych organizowanych w wielu krajach świata, w tym także w Polsce. Ten sam materiał obowiązuje w mniejszych zawodach miedzynarodowych matematycznych, w których uczestniczy nasz kraj (MEMO, Baltic-Way, CPS, EGMO) i wykracza znacznie poza obowiązującą podstawę programową z matematyki w polskich (i nie tylko) szkołach ponadgimnazjalnych.

Warunki zakwaterowania i wyżywienia były bardzo dobre. Zarówno uczniowie jak i ich opiekunowie zostali zakwaterowani w hotelach o wysokim standardzie. Po zawodach oraz czasie oceniania zadań uczniowie brali udział w wielu imprezach rekreacyjnych, sportowych oraz rozrywkowych. Została zorganizowana także wycieczka do miejscowego „Aquarium". Każdej reprezentacji, w tym także polskiej, przydzielono opiekuna, który stale towarzyszył drużynie i służył pomocą w każdej chwili.

Następna, 54. Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna odbędzie się w lipcu 2013 r. w mieście Barranquilla, w Kolumbii.

Waldemar Pompe, przewodniczący delegacji polskiej

VI Środkowoeuropejskie Zawody Matematyczne

Sprawozdanie

W dniach 6 — 12 września 2012 r. odbyły się w Solothurn w Szwajcarii VI Środkowoeuropejskie Zawody Matematyczne. Uczestniczyło 10 delegacji z: Austrii, Chorwacji, Czech, Litwy, Niemiec, Polski, Słowacji, Słowenii, Szwajcarii i Węgier. Ekipy liczyły po 6 uczniów (urodzonych nie wcześniej niż w 1994 roku) i po 2 opiekunów. Międzynarodowe jury składało się z opiekunów reprezentacji uczestniczących krajów.

Przewodniczącym delegacji polskiej był prof. dr hab. Andrzej Fryszkowski z Wydziału Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej, a jego zastępcą był Szymon Kubicius, student Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego. W zawodach uczestniczyli:
Sławomir Kubicki z I LO im. Stanisława Dubois w Koszalinie (4 pkt.),
Barbara Mroczek z XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (medal brązowy, 9 pkt.),
Paweł Nałęcz–Jawecki z XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (medal brązowy, 9 pkt.),
Konrad Jan Paluszek z XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (medal brązowy, 9 pkt.),
Kamil Rychlewicz z I LO im. Mikołaja Kopernika w Łodzi (medal złoty, 25 pkt.),
Bartłomiej Żak z XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (medal srebrny, 16 pkt.).

W czasie zawodów indywidualnych, które przeprowadzono 8 września, rozwiązywano 4 zadania, za każde można było otrzymać maksymalnie 8 punktów. Zadania na zawody indywidualne okazały się trudne i stąd niskie limity przyznawania medali. Należy też podkreślić, że pierwsze zadanie (równanie funkcyjne) rozwiązał tylko nasz uczeń Bartłomiej Żak. 9 września odbyły się zawody zespołowe. Do rozwiązania było 8 zadań po 8 pkt. Nasza drużyna zdobyła bezapelacyjnie pierwsze miejsce rozwiązując siedem zadań, za które otrzymała 56 punktów. Drudzy byli Węgrzy, którzy uzyskali 46 pkt, a trzecie miejsce zajęła ekipa Chorwacji — 45 pkt. Po zawodach zwiedzano Solothurn i Berno. Była też wycieczki do fabryki czekolady oraz sera. Uczniowie rozegrali mecze koszykówki i piłki nożnej, można też było pograć w bilard. Wręczanie zdobytych medali odbyło się po uroczystej kolacji, w której uczestniczyli przedstawiciele władz kantonu, stowarzyszenia matematycznego oraz lokalnych władz. Na zakończenie przewodniczący delegacji węgierskiej zaprosił na MEMO VII na

Węgrzech we wrześniu 2013.

Wyniki uzyskane przez naszych uczniów należy uznać za bardzo dobre. Kamil Rychlewicz wygrał zawody zdobywając 25 punktów wyprzedzając o 1 punkt Węgra Attilę Szabo, który również w zeszłym roku był drugi. Trzeba stwierdzić, że w zawodach indywidualnych lepsze wyniki uzyskali uczniowie węgierscy, jednak to uczniowie polscy zdecydowanie wygrali zawody zespołowe. Zadania, którego nie rozwiązali (T2 - nierówność), nie udało się zrobić żadnemu zespołowi. Chcę też podkreślić, że ekipa była bardzo sympatyczna i koleżeńska. Rej wodził Bartek Żak, który w czasie wolnym organizował różne gry zapraszając do nich również uczniów z innych ekip.

Andrzej Fryszkowski, przewodniczący delegacji polskiej

V **Międzynarodowe Mistrzostwa Rumunii w Matematyce**

Sprawozdanie

Jesienią 2011 r. matematycy rumuńscy zaprosili do udziału w zawodach w Bukareszcie zespoły z kilku krajów, w tym z Polski. Do stolicy Rumunii pojechali:

Grzegorz Białek,	Maciej Dulęba,
Teodor Jerzak,	Karol Kaszuba,
Wojciech Nadara,	Michał Zając

pod kierownictwem Kamila Duszenki, doktoranta wydziału Matematyki, i Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego i Filipa Borowca, studenta wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego.

W zawodach wzięły udział delegacje z następujących 12 państw: Brazylia, Bułgaria, Chiny, Polska, Rosja, Rumunia (4 reprezentacje), Serbia, Stany Zjednoczone, Ukraina, Węgry, Wielka Brytania oraz Włochy. Reprezentacje przebywały w Bukareszcie w dniach 29 lutego — 5 marca 2012 r. Uczniowie byli zakwaterowani w domu studenckim „Moxa” należącym do Akademii Studiów Ekonomicznych, a przewodniczący delegacji i ich zastępcy — w hotelu Minerva. W skład Jury zawodów weszli przewodniczący delegacji wszystkich biorących udział krajów, a obradom przewodniczył prof. Ilya Bogdanov z Moskwy. W dniu 1 marca Jury dokonało wyboru zadań spośród propozycji nadesłanych przez uczestniczące państwa oraz przetłumaczenia wybranych zadań na języki ojczyste zawodników. Zawody odbyły się w dniach 2 i 3 marca w salach Narodowego Kolegium Informatycznego im. Tudora Vianu w Bukareszcie, miały charakter indywidualny i każdego dnia polegały na rozwiązywaniu przez poszczególnych uczniów 3 zadań w czasie 4,5 godziny. Za rozwiązanie każdego zadania można było otrzymać od 0 do 7 punktów. Po sprawdzeniu prac i ujednoliceniu ocen przez koordynatorów zatwierdzono wyniki zawodów oraz przyznano najlepszym zawodnikom 7 medali złotych, 11 srebrnych i 15 brązowych. Ponadto każdy zawodnik, który nie otrzymał medalu, ale uzyskał ocenę 7 pkt za przynajmniej jedno rozwiązanie, został wyróżniony wzmianką zaszczytną. Trzy najwyższe miejsca zajęli: Omer Cerrahoglu z Rumunii (32 pkt), Chen Jingwen z Chin (30 pkt) oraz Octav Dragoi z Rumunii (29 pkt). Polscy uczniowie osiągnęli następujące wyniki:

Grzegorz Białek 12 punktów (wzmianka zaszczytna), Maciej Dulęba 23 punkty (srebrny medal), Teodor Jerzak 9 punktów, Karol Kaszuba 13 punktów (wzmianka zaszczytna), Wojciech Nadara 19 punktów (brązowy medal), Michał Zając 21 punktów (brązowy medal). W klasyfikacji drużynowej, polegającej na zsumowaniu wyników trzech najlepszych uczniów danej reprezentacji, pięć pierwszych miejsc zajęły: Chiny i Rumunia 1 po 83 punkty, Rosja 78 punktów, Stany Zjednoczone 70 punktów, Polska 63 punkty. Warunki zakwaterowania i wyżywienia były dobre. Zawodnikom zapewniono program turystyczno-naukowy, w ramach którego odwiedzili oni Instytut Matematyczny Akademii Rumuńskiej im. Simiona Stoilowa, Narodowe Muzeum Historii Przyrody im. Grigore Antipy oraz Narodowe Muzeum „Pałac Cotroceni”.

Tegoroczne wyniki polskiej ekipy są znacznie lepsze niż zeszłoroczne. Należy pamiętać, że na Mistrzostwa Rumunii w Matematyce zapraszana jest wyłącznie czołówka złożona z kilkunastu krajów osiągających regularnie najlepsze wyniki w zawodach Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej, od której Mistrzostwa są zasadniczo zawodami jeszcze trudniejszymi. W związku z tym już sam fakt zaproszenia naszej reprezentacji na Mistrzostwa jest dowodem uznania w świecie poziomu prezentowanego przez polskich uczniów na występach międzynarodowych. Medale otrzymuje niecała połowa wszystkich zawodników - trzeba więc stwierdzić, że otrzymanie medali przez połowę polskiej reprezentacji oraz piąte miejsce naszego kraju w klasyfikacji drużynowej to udany wynik.

Kamil Duszenko, przewodniczący delegacji polskiej

I Europejska Olimpiada Matematyczna dla Dziewcząt

Sprawozdanie

Polska reprezentacja wygrała pierwszą Europejską Olimpiadę Matematyczną dla Dziewcząt (European Girls' Mathematical Olympiad, EGMO). W zawodach, odbywających się w Cambridge w Wielkiej Brytanii, wzięło udział 70 uczestniczek z 19 krajów z Europy i nie tylko. Polki wygrały klasyfikację drużynową zdobywając w sumie 122 punkty, pokonując o włos Rumunię (121 punktów), Ukrainę (117 punktów) oraz Stany Zjednoczone (110 punktów).

Zawody odbyły się w dniach 12 — 13 kwietnia w Edwards Murray College w Cambridge. Każdego dnia uczestniczki miały do rozwiązania po 4 zadania w czasie 4,5 godziny. Każdy kraj mógł wystawić reprezentację złożoną z co najwyżej czterech dziewcząt. W polskiej drużynie najlepszy wynik uzyskała Barbara Mroczek, zdobywając 36 punktów i złoty medal (złote medale przyznawane są pierwszej 1/12 uczestniczek). Anna Siennicka (31 punktów), Agata Latacz (28 punktów) oraz Anna Olech (27 punktów) zdobyły srebrne medale. Medale oraz trofeum za wygraną w klasyfikacji drużynowej zostały wręczone zawodniczkom podczas uroczystej gali, która odbyła się 15 kwietnia wieczorem.

Europejska Olimpiada Matematyczna dla Dziewcząt odbyła się w tym roku po raz pierwszy. Zawody wzorowane są na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej, zaś inspiracją do zorganizowania konkursu była Chińska Olimpiada Matematyczna dla Dziewcząt, która odbywa się już od 10 lat. Przyszłoroczne zawody odbędą się w Luksemburgu. Więcej informacji można znaleźć na stronie http://www.egmo2012.org.uk/

Przewodniczącym delegacji był mgr Michał Pilipczuk z uniwersytetu w Bergen, a wiceprzewodniczącą była mgr Joanna Ochremiak z Instytutu Matematycznego PAN w Warszawie.

Michał Pilipczuk, przewodniczący delegacji polskiej

XXII Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich

Sprawozdanie

XXII Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich (Baltic Way) Greifswald (Niemcy) przeprowadzono w dniach 3 — 7 listopada 2011 r. W zawodach wzięły udział delegacje z następujących 11 państw: Dania, Estonia, Finlandia, Islandia, Litwa, Łotwa, Niemcy, Norwegia, Szwecja, Polska oraz — na specjalne zaproszenie organizatorów — Republika Południowej Afryki. Jednak po raz drugi z rzędu nieobecna była — tradycyjnie dotąd uczestnicząca w tych zawodach — reprezentacja miasta Sankt Petersburg. Polskę reprezentowali uczniowie:

Dominik Burek,	Grzegorz Głuch,
Igor Kotrasiński,	Janusz Schmude,
Anna Siennicka	

oraz mgr Kamil Duszenko, przewodniczący delegacji i mgr Andrzej Grzesik, zastępca przewodniczącego delegacji.

W skład Jury zawodów weszli przewodniczący delegacji wszystkich biorących udział krajów, a obradom Jury przewodniczył prof. Hans-Dietrich Gronau z Uniwersytetu w Rostocku. W dniu 4 listopada Jury wybrało zadania spośród propozycji nadesłanych przez uczestniczące państwa.

Członkowie jury przetłumaczyli je na języki ojczyste zawodników.

Zawody odbyły się w dniu 5 listopada w salach gimnazjum im. Alexandra von Humboldta w Greifswaldzie, miały charakter drużynowy i polegały na rozwiązaniu przez poszczególne drużyny 20 zadań w czasie 4,5 godziny. Za rozwiązanie każdego zadania można było otrzymać od 0 do 5 punktów. Po sprawdzeniu prac i ujednoliceniu ocen przez koordynatorów Jury zatwierdziło następujące wyniki:

1.	Polska	94	7.	Szwecja	48
2.	Łotwa	80	8–9.	Estonia	39
3.	Niemcy	78	8–9.	Islandia	39
4.	Dania	68	10.	Norwegia	30
5.	Litwa	67	11.	RPA	20
6.	Finlandia	50			

Uroczystość zakończenia zawodów oraz ogłoszenia wyników odbyła się dnia 6 listopada w auli Uniwersytetu im. Ernsta Moritza Arndta w Greifswaldzie. Na uroczystości obecna była Christine Kirchner — przedstawicielka ministerstwa edukacji, nauki i kultury landu Meklemburgia–Pomorze Przednie będącego głównym sponsorem zawodów. Zwycięska drużyna polska otrzymała puchar przechodni oraz drobne upominki.

Warunki zakwaterowania i wyżywienia były dobre. Zawodnikom zapewniono niezwykle bogaty program turystyczno–naukowy, w ramach którego odwiedzili oni muzeum łodzi podwodnych oraz interaktywną wystawę fizyczną „Phänomenta” w Peenemünde, elektrownię jądrową Lubmin oraz Instytut Fizyki Plazmowej im. Maxa Plancka, w którym powstaje reaktor fuzji plazmowych — potencjalna bezpieczna elektrownia przyszłości. W programie znalazła się również wycieczka z przewodnikiem po zabytkowym centrum Greifswaldu oraz wizyta w Muzeum Pomorskim.

Tegoroczne wyniki polskiej ekipy należy uznać za znakomite. Nasi uczniowie wygrali zawody rozwiązując 19 zadań z 20, a następna w kolejności drużyna łotewska przedstawiła jedynie 16 rozwiązań pełnych lub z drobnymi błędami oraz kilka częściowych. Ponadto w kilku zadaniach polscy uczestnicy zaprezentowali rozwiązania znacznie bardziej eleganckie niż rozwiązania znane członkom Jury. Warto także zauważyć, że wszystkie oceny rozwiązań złożonych przez naszą drużynę — z wyjątkiem jednego zadania — były ocenami maksymalnymi (5 punktów), co świadczy o umiejętności czytelnego redagowania rozwiązań oraz wysokiej kulturze matematycznej polskich zawodników.

Kamil Duszenko, przewodniczący delegacji polskiej

II Olimpijskie Warsztaty dla Nauczycieli

Sprawozdanie

W dniach 19 — 21 października 2012 roku odbyły się drugie Olimpijskie Warsztaty dla Nauczycieli. Tak, jak w ubiegłym roku, miały one miejsce w Krakowie, na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego. Organizatorzy uznali, że zeszłoroczna formuła sprawdziła się bardzo dobrze tak pod względem programowym jak i organizacyjnym. W szczególności wybór miejsca - Kraków łączy w sobie zalety miejsca atrakcyjnego jako takie z miejscem atrakcyjnym matematycznie. Biorąc pod uwagę możliwość niedrogiego zakwaterowania uczestników warsztatów, wybór miejsca wydaje się ze wszech miar racjonalny.

Podobnie jak w roku ubiegłym uczestnicy rekrutowali się spośród nauczycieli których wychowankowie „pokazali się” w Olimpiadzie. Jako szczególnie ważny element rekrutacji przyjęto, by pracowali w szkołach w mniejszych ośrodkach, oddalonych od centrów akademickich. W takich miejscach nie ma zbyt wiele okazji na przygotowanie się do roli opiekuna najzdolniejszej młodzieży, więc udział w warsztatach jest dla nich szczególne ważny. W tym roku wybraliśmy nauczycieli bardziej wnikliwie niż w roku poprzednim, w wyniku czego zdecydowana ich większość miała ograniczone doświadczenie w pracy z uczniami szczególnie uzdolnionymi. Założono ponadto, że nie zapraszamy tych, którzy uczestniczyli w Warsztatach w ubiegłym roku, by zwiększyć liczbę osób, które mogą z naszej pomocy skorzystać. Do udziału w Warsztatach zaproszono 36 nauczycieli, którzy potwierdzili chęć przybycia; niestety, do Krakowa przyjechało jedynie 25, a dość późna rezygnacja części z nich uniemożliwiła dokooptowanie następnych. To był chyba największy minus tegorocznych warsztatów — naszym zdaniem liczba uczestników powinna wynosić około 35 osób, bo wtedy prowadzący zajęcia ma jeszcze swobodny kontakt z salą i zarazem budżet pozwala na zaproszenie tylu nauczycieli. Ponadto, w Warsztatach wzięło udział dwoje studentów ostatniego roku matematyki UJ przygotwujących się do zawodu nauczycielskiego. Przebywając akurat w budynku Wydziału, przyszli na pierwszy wykład, który tak in się spodobał, że wzięli udział we wszystkich.

Tak, jak w roku ubiegłym, merytorycznym przygotowaniem programu Warsztatów zajął się Krzysztof Ciesielski przy współpracy Michała Wojciechowskiego, Edwarda Tutaja i Michała Krycha, a organizacją całej imprezy - Joanna Meissner. Ustalono, że większość wykładów poświęconych będzie konkretnym zagadnieniom matematycznym związanym z zadaniami olimpijskimi i pozwoli wykładowcy na uwidocznienie roli teorii w ich rozwiązywaniu, część zajęć natomiast będzie poświęcona praktycznej pracy z młodzieżą — o poprawadzenie tych zajęć zostali poproszeni znakomici, bardzo doświadczeni i znani z pracy z uzdolnioną młodzieżą nauczyciele matematyki. Ogólnie, bazowano na ubiegłorocznym programie, jednak tylko parę wykładów zostało (w przybliżeniu) powtórzonych; niektórzy wykładowcy mówili o czym innym, niż rok temu, oprócz tego poproszono o wykłady kilka osób, które nie występowały poprzednio.

Większość wykładów dotyczyła metod rozwiązywania zadań, dostarczając uczestnikom solidnej bazy dziesiątków zadań do pracy z uczniami. Wykładali: Michał Krych i Michał Wojciechowski (Warszawa) oraz Krzysztof Ciesielski, Danuta Ciesielska, Armen Edigarian, Leszek Pieniążek i Edward Tutaj (Kraków). Metodyka rozwiązywania zadań pojawiła się w części prowadzonej wspólnie przez nauczycieli - Jacka Dymela i Michała Niedźwiedzia. Głównym celem tego spotkania była prezentacja metod organizacji pracy z uczniami zdolnymi począwszy od ich naboru, poprzez kółka, warsztaty, obozy - ze szczegółowym omówieniem ich formy. Te zajęcia wzbudziły bardzo duże zainteresowanie potwierdzające trafność wyboru uczestników warsztatów. Widać było że wszyscy łakną wymiany doświadczeń i poszukują skutecznych metod pracy z uczniami. Ogromne zainteresowanie towarzyszyło wymianie doświadczeń organizacyjnych w ramach dyskusji plenarnej poświęconej Olimpiadzie Matematycznej i nie tylko jej. Nauczyciele z Żywca i z Końskich opowiadali o swoich próbach (jak dotąd udanych!) stworzenia czegoś w rodzaju klas matematycznych z rozszerzonym programem. Ich opowieści uświadamiały, jak trudne jest to wyzwanie dla samotnych entuzjastów, z jak wielkimi problemami rozmaitej natury się borykają, ale też jak wiele satysfakcji taka działalność może przynosić. Sądząc z ożywionego odbioru ich pomysły trafiły na podatny grunt. Niewykluczone, że niektórzy uczestnicy warsztatów uwierzą we własne siły i już niedługo spróbują coś zrobić w innych miejscowościach.

Są to inicjatywy godne jak najmocniejszego wsparcia. To wsparcie powinno pochodzić ze strony Ministerstwa Edukacji, ale nic takiego nie ma miejsca i smutne doświadczenie każe przypuszczać, że ta sytuacja się nie zmieni. W tej chwili jedyną organizacją, która mogłaby przynajmniej częściowo wesprzeć takie projekty wydaje się być Stowarzyszenie na Rzecz Edukacji Matematycznej. Słuchając nauczycieli, którzy podjęli się tych wyzwań po raz pierwszy uwierzyłem, że jest to możliwe w skali całego kraju. W dyskusjach kuluarowych okazało się jak niewiele potrzeba (oczywiście oprócz nauczyciela entuzjasty — to jest warunek si ne qua non), by taki projekt się powiódł. Nie wymaga prawie żadnych specjalnych nakładów finansowych, wszystko jest w zasadzie możliwe do zrealizowania w ramach aktualnych budżetów. Wystarczy dobra (nawet tylko umiarkowanie dobra) wola dyrektora szkoły i burmistrza. Gdyby jeszcze do tego dołożyć wsparcie programowe ze strony SEM, nie wątpię, że już wkrótce doczekalibyśmy się kilkudziesięciu powiatowych klas matematycznych. A to oznacza otwarcie możliwości edukacyjnych dla młodzieży uzdolnionej - możliwości tak skutecznie ograniczonych przez opacznie pojęte umasowienie szkolnictwa średniego.

Ten nieco może przydługi opis dyskusji towarzyszących Warsztatom jest o tyle istotny, że pokazuje coś więcej niż tylko „techniczny” ich aspekt. Oczywiście byłoby wspaniale, gdyby zajęcia mogły ograniczyć się tylko do spraw czysto metodycznych, ale jest też niezaprzeczalną wartością Warsztatów to, że stają się forum, na którym dojrzewają idee dotyczące generaliów szkolnictwa. I to nie narzucane odgórnie!

Nauczyciele otrzymali w prezencie po dwie książki, które niewątpliwie przydadzą im się tak w pracy z młodzieżą: „Zbiór zadań z kółka matematycznego” Michała Niedźwiedzia oraz „Podzielność w zbiorze liczb całkowitych” Andrzeja Nowickiego (wydanie drugie rozszerzone). Ponadto każdy nauczyciel otrzymał numery miesięcznika „Delta”, ofiarowane przez redakcję tego czasopisma.

Na koniec trzeba wspomnieć o doskonałej organizacji Warsztatów. Uczestnicy mieli okazję nie tylko brać udział w zajęciach óficjalnychąle również uczestniczyć w dyskusjach przy zorganizowanych pod samym Wawelem uroczystych kolacjach, a nawet oderwać się na chwilę od edukacyjnej rzeczywistości na spektaklu teatralnym. Wielkie wyrazy uznania należą się p. Joannie Meissner za wzorowe zorganizowanie całej imprezy.

Odbiór Warsztatów przez nauczycieli był entuzjastyczny. O tym jak bardzo potrzebne są tego typu zajęcia najlepiej świadczą komentarze uczestników, którzy nie potrafili zrozumieć dlaczego takich spotkań nie może być więcej szczególnie w kontekście ilości pieniędzy „wyrzucanych w błoto” na przeprowadzanie setek bezproduktywnych szkoleń za budżetowe pieniądze. Wszyscy, bez wyjątku, wyrażali chęć uczestnictwa w podobnych imprezach organizowanych w przyszłości.

W imieniu uczestników, organizatorów oraz swoim pragnę bardzo podziękować Sponsorowi za możliwość zorganizowania Warsztatów. Jestem pewien, że stanowić będą przyczynek do wzrostu jakości kształcenia w naszym kraju.

Michał Wojciechowski

TEKSTY ZADAŃ

Zawody pierwszego stopnia

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases}(x+y)^3 = 8z,\\ (y+z)^3 = 8x,\\ (z+x)^3 = 8y.\end{cases}$$

2. Znaleźć wszystkie takie pary dodatnich liczb całkowitych (x, y), że liczba $2^x + 5^y$ jest kwadratem liczby całkowitej.

3. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AC i BC, przy czym $AE = AD$ i $BF = BD$. Punkt S jest symetryczny do punktu C względem środka okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wykazać, że $SE = SF$.

4. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 1$. Dla niepustego podzbioru X zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ niech a i b oznaczają odpowiednio najmniejszy i największy element zbioru X oraz niech

$$f(X) = \frac{1}{n-(b-a)}.$$

Wyznaczyć, w zależności od n, sumę liczb $f(X)$ dla wszystkich niepustych podzbiorów X zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$.

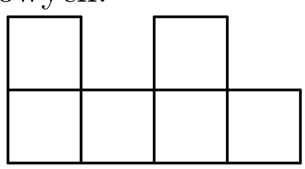
5. Znaleźć wszystkie takie ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_{63})$ złożone z różnych dodatnich liczb całkowitych, że dla $i = 1, 2, \ldots, 62$ liczba a_i jest dzielnikiem liczby $1 + a_{i+1}$, zaś liczba a_{63} jest dzielnikiem liczby $1 + a_1$.

6. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzi równość

$$\sphericalangle DAB + 2\sphericalangle BCD = 180^\circ. \qquad (1)$$

Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boków AB i AD odpowiednio w punktach K i L. Wykazać, że okręgi opisane na trójkątach AKL i BCD są styczne.

7. Znaleźć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (m, n), dla których prostokąt o wymiarach $m \times n$ można zbudować z następujących klocków utworzonych z 6 kwadratów jednostkowych:



8. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f określone na zbiorze liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość

$$f(x+f(x+y)) = f(x-y) + f(x)^2. \tag{1}$$

9. Wyznaczyć wszystkie takie liczby całkowite $n \geqslant 1$, że liczba $1+2^{n+1}+4^{n+1}$ jest podzielna przez liczbę $1+2^n+4^n$.

10. Znaleźć wszystkie takie liczby całkowite $n \geqslant 2$, że istnieje zbiór n punktów na płaszczyźnie, z których każdy leży na zewnątrz pewnego koła, zawierającego wszystkie pozostałe punkty i mającego środek w jednym z nich.

11. W ostrosłupie o podstawie ABC i wierzchołku S wysokości AA', BB', CC', SS' przecinają się w jednym punkcie, leżącym wewnątrz ostrosłupa. Punkt O jest środkiem sfery opisanej na danym ostrosłupie. Dowieść, że jeśli prosta SO jest prostopadła do płaszczyzny $A'B'C'$, to ostrosłup $ABCS$ jest prawidłowy.

12. Mając dany skończony ciąg liczb, tworzymy z niego nowy ciąg, wstawiając pomiędzy każdą parę kolejnych wyrazów nowy wyraz, równy ich sumie. Rozpoczynamy od ciągu $(1,1)$ i wykonujemy wielokrotnie tę operację, otrzymując w pierwszym kroku ciąg $(1,2,1)$, w drugim kroku ciąg $(1,3,2,3,1)$ itd.
Dla każdego $n \geqslant 1$ obliczyć sumę sześcianów wyrazów ciągu otrzymanego w n-tym kroku.

Zawody drugiego stopnia

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych a, b, c, d układ równań

$$\begin{cases} a^3+b=c, \\ b^3+c=d, \\ c^3+d=a, \\ d^3+a=b. \end{cases}$$

2. Udowodnić, że w czworościanie $ABCD$ wierzchołek D, środek sfery wpisanej oraz środek ciężkości czworościanu leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy pola trójkątów ABD, BCD i CAD są równe.

3. Niech m, n będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że w zbiorze $\{1,2,\ldots,n\}$ znajduje się dokładnie m liczb pierwszych. Dowieść, że wśród dowolnych $m+1$ różnych liczb z tego zbioru można znaleźć liczbę, która jest dzielnikiem iloczynu pozostałych m liczb.

4. Znaleźć wszystkie takie pary funkcji f, g określonych na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujących wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniona jest równość

$$g(f(x) - y) = f(g(y)) + x. \tag{1}$$

5. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle CAB = 60°$ oraz $AB \neq AC$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, a punkt I — środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wykazać, że symetralna odcinka AI, prosta OI oraz prosta BC przecinają się w jednym punkcie.

6. Niech $S(k)$ oznacza sumę cyfr liczby całkowitej k w zapisie dziesiętnym. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych n, że $S(2^n + n) < S(2^n)$.

Zawody trzeciego stopnia

1. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka dodatnia liczba wymierna w, nie będąca liczbą całkowitą, że potęga w^w jest liczbą wymierną.

2. Wyznaczyć wszystkie pary (m, n) dodatnich liczb całkowitych, dla których sześcian K o krawędzi n można obudować prostopadłościennymi klockami o wymiarach $m \times 1 \times 1$ w taki sposób, by powstał sześcian o krawędzi $n + 2$, mający ten sam środek co K.

3. Trójkąt ABC, w którym $AB = AC$, jest wpisany w okrąg o. Okręgi o_1 i o_2 są styczne wewnętrznie do okręgu o odpowiednio w punktach P i Q, są też styczne odpowiednio do odcinków AB i AC oraz są rozłączne z wnętrzem trójkąta ABC. Niech m będzie taką prostą styczną do okręgów o_1 i o_2, że punkty P i Q leżą po przeciwnej jej stronie niż punkt A. Prosta m przecina odcinki AB i AC odpowiednio w punktach K i L. Dowieść, że punkt przecięcia prostych PK i QL leży na dwusiecznej kąta BAC.

4. W turnieju wzięło udział n zawodników ($n \geqslant 4$). Każdy zawodnik rozegrał dokładnie jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, nie było remisów. Zakładamy, że nie istnieje taka czwórka zawodników (A, B, C, D), że A wygrał z B, B wygrał z C, C wygrał z D oraz D wygrał z A. Wyznaczyć, w zależności od n, największą możliwą liczbę takich trójek zawodników (A, B, C), że A wygrał z B, B wygrał z C oraz C wygrał z A.

(*Uwaga:* Trójki (A, B, C), (B, C, A) i (C, A, B) uważamy za jedną trójkę.)

5. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, a dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D. Niech M będzie takim punktem, że $MC \perp BC$ oraz $MA \perp AD$. Proste BM i OA przecinają się w punkcie P. Wykazać, że okrąg o środku P i przechodzący przez punkt A jest styczny do prostej BC.

6. Dowieść, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$(1) \qquad \Big(\frac{a-b}{c}\Big)^2 + \Big(\frac{b-c}{a}\Big)^2 + \Big(\frac{c-a}{b}\Big)^2 \geqslant 2\sqrt{2}\Big(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\Big).$$

LIII Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna

1. Dany jest trójkąt ABC. Punkt J jest środkiem okręgu stycznego do odcinka BC w punkcie M oraz do prostych AB i AC odpowiednio w punktach K i L leżących poza bokami trójkąta. Proste LM i BJ przecinają się w punkcie F, a proste KM i CJ przecinają się w punkcie G. Proste AF i AG przecinają prostą BC odpowiednio w punktach S i T. Wykazać, że punkt M jest środkiem odcinka ST.

2. Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą całkowitą oraz niech $a_2, a_3, \ldots, a_n$ będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi, dla których $a_2 a_3 \ldots a_n = 1$. Udowodnić, że

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \ldots (1 + a_n)^n > n^n.$$

3. Gra w *zgadującego* i *kłamcę* rozgrywa się pomiędzy dwoma graczami A i B. Reguły gry są zależne od dwóch dodatnich liczb całkowitych k i n, które są znane obu graczom. Na początku Ala wybiera liczby całkowite x i N, które spełniają nierówności $1 \leqslant x \leqslant N$. Gracz A trzyma liczbę x w tajemnicy, natomiast liczbę N przekazuje graczowi B. Gracz B z kolei próbuje zdobyć informacje o liczbie x zadając graczowi A pytania. Przed każdym pytaniem gracz B wybiera dowolny zbiór S dodatnich liczb całkowitych, po czym pyta gracza A, czy liczba x należy do zbioru S. Gracz B może zadać tyle pytań, ile chce, może także wielokrotnie wybierać ten sam zbiór S. Na każde pytanie gracza B Ala musi natychmiast odpowiedzieć *tak* albo *nie*. Może przy tym skłamać dowolną liczbę razy, jednak odpowiadając na dowolne $k + 1$ kolejnych pytań co najmniej raz musi powiedzieć prawdę. Po zakończeniu zadawania pytań gracz B musi podać zbiór X złożony z co najwyżej n dodatnich liczb całkowitych. Jeżeli liczba x należy do zbioru X, to gracz B wygrywa, a w przeciwnym wypadku gracz B przegrywa. Dowieść, że:

1) jeżeli $n \geqslant 2^k$, to gracz B może zagwarantować sobie zwycięstwo;

2) dla każdej dostatecznie dużej liczby k istnieje taka liczba całkowita $n \geqslant 1{,}99^k$, przy której gracz B nie może zagwarantować sobie wygranej.

4. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f określone na zbiorze wszystkich liczb całkowitych i przyjmujące wartości w tym samym zbiorze, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c spełniających równość $a+b+c=0$ prawdziwa jest zależność

$$(1) \qquad (f(a))^2+(f(b))^2+(f(c))^2=2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a).$$

5. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest prosty, a punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z tego wierzchołka. Punkt X leży wewnątrz odcinka CD. Na odcinkach AX i BX wybrano odpowiednio takie punkty K i L, że spełnione są równości $BK=BC$ i $AL=AC$. Proste AL i BK przecinają się w punkcie M. Wykazać, że $MK=ML$.

6. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których istnieją nieujemne liczby całkowite a_1, a_2, …, a_n spełniające równości

$$\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_2}}+\ldots+\frac{1}{2^{a_n}}=\frac{1}{3^{a_1}}+\frac{2}{3^{a_2}}+\ldots+\frac{n}{3^{a_n}}=1.$$

VI Środkowoeuropejska Olimpiada Matematyczna

1. Znaleźć wszystkie takie funkcje f określone na zbiorze dodatnich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości w tym samym zbiorze, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x, y spełniona jest równość

$$(1) \qquad f(x+f(y))=yf(xy+1).$$

2. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Podzbiór S zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$ nazwiemy *dopuszczalnym*, jeżeli nie zawiera on takich trzech różnych elementów a, b, c, że liczba a jest dzielnikiem liczby b, a liczba b jest dzielnikiem liczby c. Wyznaczyć, w zależności od n, największą możliwą liczbę elementów podzbioru dopuszczalnego.

3. Dany jest trapez $ABCD$ o dłuższej podstawie AB i krótszej podstawie CD. Prosta BD jest dwusieczną kąta ADC. Prosta równoległa do prostej AD przechodząca przez punkt C przecina odcinki BD i AB odpowiednio w punktach E i F. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BEF. Udowodnić, że jeżeli $\sphericalangle ACO=60^\circ$, to

$$CF=AF+FO.$$

4. Ciąg a_0, a_1, a_2, ... jest określony wzorami: $a_0 = 2$, $a_1 = 4$ oraz

$$(1) \qquad a_{n+1} = \tfrac{1}{2}a_n a_{n-1} + a_n + a_{n-1} \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których istnieje taka liczba całkowita $m \geqslant 1$, że liczba $a_m - 1$ jest podzielna przez p.

5. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$(1) \qquad \begin{cases} 2x^3 + 1 = 3zx, \\ 2y^3 + 1 = 3xy, \\ 2z^3 + 1 = 3yz. \end{cases}$$

6. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek $abc = 1$. Udowodnić, że

$$\sqrt{9 + 16a^2} + \sqrt{9 + 16b^2} + \sqrt{9 + 16c^2} \geqslant 3 + 4(a + b + c).$$

7. Dla danej dodatniej liczby całkowitej n rozważamy wszystkie ciągi n-wyrazowe o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2\}$. Blokiem xy w takim ciągu nazwiemy parę sąsiednich wyrazów równych kolejno x oraz y. Niech a oznacza liczbę takich ciągów o parzystej liczbie bloków 01 i parzystej liczbie bloków 02. (Zero jest liczbą parzystą). Niech b oznacza liczbę takich ciągów o nieparzystej liczbie bloków 01 i nieparzystej liczbie bloków 02. Dowieść, że $a > b$.

8. Dana jest liczba pierwsza $p > 2$. Dla permutacji $a = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ ciągu $c = (1, 2, \ldots, p)$ niech $f(a)$ oznacza liczbę tych spośród liczb

$$a_1, \quad a_1 + a_2, \quad a_1 + a_2 + a_3, \quad \ldots, \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_p,$$

które są podzielne przez p. Znaleźć średnią arytmetyczną liczb $f(a)$ dla wszystkich $p!$ permutacji ciągu c.

9. W trójkącie ABC punkt K jest środkiem boku AB, a punkty L i M leżą odpowiednio na bokach AC i BC, przy czym $\sphericalangle CLK = \sphericalangle KMC$. Udowodnić, że proste prostopadłe do boków AB, AC i BC, przechodzące odpowiednio przez punkty K, L i M, przecinają się w jednym punkcie.

10. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, nie mający pary równoległych boków, w którym $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA$. Przypuśćmy, że punkty przecięcia par sąsiednich dwusiecznych kątów wewnętrznych czworokąta $ABCD$ są wierzchołkami czworokąta wypukłego, którego przekątne przecinają się w punkcie K. Wykazać, że punkt przecięcia prostych AB i CD leży na okręgu opisanym na trójkącie BKD.

11. Rozwiązać w dodatnich liczbach całkowitych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x^y + y^x = z^y, \\ x^y + 2012 = y^{z+1}. \end{cases}$$

12. Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n niech $d(n)$ oznacza liczbę wszystkich dodatnich dzielników liczby n. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a i b, że

$$d(a) = d(b), \qquad d(a^2) = d(b^2) \qquad \text{oraz} \qquad d(a^3) \neq d(b^3).$$

V Międzynarodowe Mistrzostwa Rumunii w Matematyce

1. Dana jest skończona liczba chłopców i dziewczyn. *Dobrym zbiorem chłopców* nazwiemy taki zbiór chłopców, że każda dziewczyna zna przynajmniej jednego chłopca z tego zbioru; *dobrym zbiorem dziewczyn* nazwiemy taki zbiór dziewczyn, że każdy chłopiec zna przynajmniej jedną dziewczynę z tego zbioru. Udowodnić, że liczba dobrych zbiorów chłopców i liczba dobrych zbiorów dziewczyn mają tę samą parzystość.

(*Uwaga:* Zakładamy, że jeśli osoba A zna osobę B, to osoba B zna osobę A.)

2. W trójkącie różnobocznym ABC punkty D, E i F są odpowiednio środkami boków BC, CA i AB. Okrąg opisany na trójkącie BCF przecina prostą BE w punkcie P różnym od B, a okrąg opisany na trójkącie ABE przecina prostą AD w punkcie Q różnym od A. Proste DP i FQ przecinają się w punkcie R. Wykazać, że środek ciężkości G trójkąta ABC leży na okręgu opisanym na trójkącie PQR.

3. Każda dodatnia liczba całkowita jest pomalowana na czerwono albo na niebiesko. Funkcja f określona na zbiorze dodatnich liczb całkowitych i przyjmująca wartości w tym samym zbiorze na następujące dwie własności:
a) jeśli $x \leqslant y$, to $f(x) \leqslant f(y)$;
b) jeśli x, y i z są (niekoniecznie różnymi) dodatnimi liczbami całkowitymi o tym samym kolorze oraz $x + y = z$, to $f(x) + f(y) = f(z)$.
Dowieść, że istnieje taka dodatnia liczba rzeczywista a, że $f(x) \leqslant ax$ dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych x.

4. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych n, że liczba $2^{2^n+1} + 1$ jest podzielna przez n, a liczba $2^n + 1$ nie jest podzielna przez n.

5. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 3$. Każde pole tabeli rozmiaru $n \times n$ pomalowano pewnym kolorem, przy czym liczba użytych kolorów wynosi co najmniej $\frac{1}{3}(n+2)^2$. Wykazać, że istnieje prostokąt o wymiarach 1×3 lub 3×1 złożony z trzech pól tabeli o różnych kolorach.

6. W trójkącie ABC punkty I i O są odpowiednio środkami okręgów wpisanego i opisanego. Okrąg ω_A przechodzący przez punkty B i C, okrąg ω_B przechodzący przez punkty C i A oraz okrąg ω_C przechodzący przez punkty A i B są styczne do okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Okręgi ω_B i ω_C przecinają się w punkcie A' różnym od A, okręgi ω_C i ω_A przecinają się w punkcie B' różnym od B, a okręgi ω_A i ω_B przecinają się w punkcie C' różnym od C. Dowieść, że proste AA', BB' i CC' przecinają się w punkcie leżącym na prostej IO.

I Europejska Olimpiada Matematyczna Dziewcząt

1. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkty D, E i F leżą odpowiednio wewnątrz boków BC, CA i AB tego trójkąta, przy czym prosta DE jest prostopadła do prostej CO, a prosta DF jest prostopadła do prostej BO. Punkt K jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie AFE. Wykazać, że proste DK oraz BC są prostopadłe.

2. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Wyznaczyć, w zależności od n, największą możliwą liczbę całkowitą m o następującej własności: w każde pole tabeli o m wierszach i n kolumnach można wpisać liczbę rzeczywistą w taki sposób, by dla dowolnych dwóch różnych wierszy $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ oraz $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ spełniona była równość

$$\max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \ldots, |a_n - b_n|\} = 1.$$

3. Wyznaczyć wszystkie funkcje określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości w tym samym zbiorze, spełniające równanie

$$f(yf(x+y) + f(x)) = 4x + 2yf(x+y)$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y.

4. Rozstrzygnąć, czy istnieje zbiór liczb całkowitych A o następujących dwóch własnościach:
1) każdy element $a \in A$ jest sumą pewnej pary (niekoniecznie różnych) elementów $b, c \in A$;
2) liczba 0 jest jedyną liczbą całkowitą, której nie można przedstawić jako sumy wszystkich elementów niepustego skończonego podzbioru zbioru A.

5. Liczby p oraz q są pierwsze i spełniają równanie

$$\frac{p}{p+1}+\frac{q+1}{q}=\frac{2n}{n+2}$$

dla pewnej dodatniej liczby całkowitej n. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości wyrażenia $q-p$.

6. Portal społecznościowy Mordoksięga ma nieskończenie wielu użytkowników. Niektóre pary różnych użytkowników są zarejestrowane jako przyjaciele, przy czym każdy użytkownik ma co najmniej jednego przyjaciela.

Każdy użytkownik wyznacza jednego ze swoich przyjaciół na najlepszego przyjaciela. Jeżeli osoba A wyznacza osobę B na swojego najlepszego przyjaciela, to osoba B nie musi koniecznie wyznaczyć osoby A na swojego najlepszego przyjaciela.

Użytkownik jest 1-najlepszym przyjacielem, jeżeli ktoś wyznaczył go na swojego najlepszego przyjaciela. Dla $n = 2, 3, 4, \ldots$ użytkownik jest n-najlepszym przyjacielem, jeżeli został wyznaczony na najlepszego przyjaciela przez osobę, która jest $(n-1)$-najlepszym przyjacielem. Użytkownika, który jest k-najlepszym przyjacielem dla każdej dodatniej liczby całkowitej k, nazywamy użytkownikiem popularnym.

a) Udowodnić, że jeżeli każdy użytkownik ma tylko skończenie wielu przyjaciół, to każdy użytkownik popularny został wyznaczony na najlepszego przyjaciela przez jakiegoś innego użytkownika popularnego.

b) Wykazać, że jeżeli użytkownicy mogą mieć nieskończenie wielu przyjaciół, to może się zdarzyć, że pewien użytkownik popularny nie został wyznaczony na najlepszego przyjaciela przez żadnego innego użytkownika popularnego.

7. Trójkąt ostrokątny ABC, którego wysokości przecinają się w punkcie H, jest wpisany w okrąg o. Punkt K leży na okręgu o po przeciwnej stronie prostej BC niż punkt A. Punkty L i M są symetryczne do punktu K odpowiednio względem prostych AB i BC. Okrąg opisany na trójkącie BLM przecina okrąg o w punkcie E różnym od B. Wykazać, że proste KH, EM oraz BC przecinają się w jednym punkcie.

8. Skończony ciąg nazwiemy *powtarzającym*, jeżeli można go uzyskać poprzez napisanie obok siebie pewnego ciągu co najmniej dwa razy. Przykładowo, ciągi a, b, a, b, a, b oraz a, b, c, a, b, c są powtarzające, ale ciagi a, b, a, b, a oraz a, a, b, b nie są. Dowieść, że w ciągu, w którym zamiana dowolnych dwóch sąsiednich (być może takich samych) wyrazów daje w wyniku ciąg powtarzający, wszystkie wyrazy są takie same.

XXII Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich

1. Liczby rzeczywiste x_1, x_2, ..., x_{2011} spełniają warunki

$$x_1 + x_2 = 2y_1, \quad x_2 + x_3 = 2y_2, \quad \ldots, \quad x_{2011} + x_1 = 2y_{2011},$$

gdzie ciąg y_1, y_2, ..., y_{2011} jest permutacją ciągu x_1, x_2, ..., x_{2011}. Udowodnić, że $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2011}$.

2. Dana jest funkcja f określona na zbiorze wszystkich liczb całkowitych i przyjmująca wartości całkowite. Ponadto dla dowolnych liczb całkowitych x i y prawdziwa jest równość

$$f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x)).$$

Wykazać, że f jest funkcją ograniczoną.

3. Dany jest ciąg dodatnich liczb całkowitych a_1, a_2, a_3, ..., w którym dla $n = 2, 3, 4, \ldots$ wyraz a_{n+1} jest ostatnią cyfrą zapisu dziesiętnego liczby $a_n^n + a_{n-1}$. Rozstrzygnąć, czy z tych założeń wynika, że dla pewnej dodatniej liczby całkowitej m ciąg a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, ... jest okresowy.

4. Nieujemne liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunek

$$a + b + c + d = 4.$$

Udowodnić, że

$$\frac{a}{a^3+8} + \frac{b}{b^3+8} + \frac{c}{c^3+8} + \frac{d}{d^3+8} \le \frac{4}{9}.$$

5. Funkcja f jest określona na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmuje wartości rzeczywiste, a ponadto spełnia równość

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1$$

dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznaczyć $f(0)$.

6. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Dowieść, że liczba prostych na płaszczyźnie, przechodzących przez początek układu współrzędnych oraz przez dokładnie jeden inny punkt o obu współrzędnych ze zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$, wynosi co najmniej $\frac{1}{4}n^2$.

7. Niech T oznacza 15-elementowy zbiór liczb postaci $10a + b$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi, dla których $1 \le a < b \le 6$. Niech S będzie takim podzbiorem zbioru T, że w zapisach dziesiętnych elementów zbioru S występuje wszystkie sześć cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, ale wśród dowolnych trzech elementów przynajmniej jedna z tych cyfr się nie pojawia. Wyznaczyć największą możliwą liczbę elementów zbioru S.

8. Dane są trzy szkoły: A, B oraz C. Do każdej z tych szkół uczęszcza przynajmniej jeden uczeń. Wśród dowolnych trzech uczniów, po jednym z każdej szkoły, pewnych dwóch uczniów się zna oraz pewnych dwóch się nie zna. Udowodnić, że prawdziwe jest przynajmniej jedno z następujących zdań:
• pewien uczeń ze szkoły A zna wszystkich uczniów szkoły B;
• pewien uczeń ze szkoły B zna wszystkich uczniów szkoły C;
• pewien uczeń ze szkoły C zna wszystkich uczniów szkoły A.

9. Prostokąt o wymiarach $m \times n$ podzielony jest na kwadraty jednostkowe. Kolorowanie tych kwadratów na biało i czarno nazwiemy *poprawnym*, jeżeli spełnia ono następujące warunki:
• wszystkie kwadraty przylegające do brzegu prostokąta są czarne;
• żadne cztery kwadraty tworzące kwadrat 2×2 nie są tego samego koloru;
• żadne cztery kwadraty tworzące kwadrat 2×2 nie są pomalowane w taki sposób, że dwa kwadraty stykające się tylko rogiem mają ten sam kolor, a pozostałe dwa mają inny kolor.
Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych $m, n \ge 3$, dla których prostokąt $m \times n$ można poprawnie pokolorować.

10. Dwie osoby grają, wykonując ruchy na przemian, w następującą grę. Na początku dana jest liczba 2011^{2011}. Każdy ruch polega albo na odjęciu liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2010\}$ od bieżącej liczby, albo na podzieleniu bieżącej liczby przez 2011 i zaokrągleniu wyniku w dół do najbliższej liczby całkowitej. Ten, kto jako pierwszy otrzyma liczbę niedodatnią, wygrywa. Rozstrzygnąć, który z graczy — rozpoczynający czy jego przeciwnik — ma strategię wygrywającą.

11. Odcinki AB i CD są średnicami okręgu o. Dla dowolnego punktu P leżącego na okręgu o niech R oraz S będą rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na proste AB oraz CD. Wykazać, że długość odcinka RS nie zależy od wyboru punktu P.

12. Punkt P leży wewnątrz kwadratu $ABCD$, przy czym stosunki długości $PA : PB : PC$ wynoszą $1 : 2 : 3$. Wyznaczyć miarę kąta BPA.

13. Punkt E leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$. Na bokach tego czworokąta budujemy, po zewnętrznej jego stronie, trójkąty ABF, BCG, CDH i DAI podobne odpowiednio do trójkątów DCE, ADE, BAE i CBE. Punkty P, Q, R, S są rzutami prostokątnymi punktu E odpowiednio na proste AB, BC, CD, DA. Dowieść, że jeśli na czworokącie $PQRS$ można opisać okrąg, to

$$EF \cdot CD = EG \cdot DA = EH \cdot AB = EI \cdot BC.$$

(*Uwaga:* Wyrażenie *trójkąt XYZ jest podobny do trójkąta $X'Y'Z'$* rozumiemy tu jako istnienie podobieństwa płaszczyzny przeprowadzającego punkty X, Y i Z odpowiednio na punkty X', Y' i Z'.)

14. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach D, E i F. Punkt G leży na tym okręgu, przy czym odcinek FG jest jego średnicą. Proste EG i FD przecinają się w punkcie H. Udowodnić, że proste CH i AB są równoległe.

15. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC$. Na boku AD wybrano taki punkt E, że

$$AE \cdot ED + BE^2 = CD \cdot AE.$$

Wykazać, że $\sphericalangle EBA = \sphericalangle DCB$.

16. Dana jest liczba całkowita a. Określamy ciąg $x_0, x_1, x_2, \ldots$ wzorami: $x_0 = a$, $x_1 = 3$ oraz

$$x_n = 2x_{n-1} - 4x_{n-2} + 3 \qquad \text{dla } n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Wyznaczyć, w zależności od a, największą liczbę całkowitą k, dla której istnieje taka liczba pierwsza p, że liczba $x_{2011} - 1$ jest podzielna przez p^k.

17. Wyznaczyć wszystkie takie dodatnie liczby całkowite d, że jeżeli liczba d jest dzielnikiem pewnej dodatniej liczby całkowitej n, to liczba d jest również dzielnikiem dowolnej liczby całkowitej otrzymanej z liczby n w wyniku przestawienia cyfr jej zapisu dziesiętnego.

18. Wyznaczyć wszystkie takie pary liczb pierwszych (p, q), że liczby $p^2 + q^3$ i $q^2 + p^3$ są kwadratami liczb całkowitych.

19. Dana jest liczba pierwsza $p \neq 3$. Udowodnić, że istnieje rosnący ciąg arytmetyczny złożony z p dodatnich liczb całkowitych, których iloczyn jest sześcianem liczby całkowitej.

20. Dodatnią liczbę całkowitą nazwiemy *zrównoważoną*, jeżeli ma ona parzystą liczbę różnych dzielników pierwszych. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych n, że wśród liczb n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ dokładnie dwie liczby są zrównoważone.

ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Zawody stopnia pierwszego

Zadanie **1.** Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} (x+y)^3 = 8z, \\ (y+z)^3 = 8x, \\ (z+x)^3 = 8y. \end{cases}$$

Rozwiązanie
Odejmując drugie równanie układu od pierwszego oraz stosując wzór na różnicę sześcianów otrzymujemy

$$8(z-x) = (x+y)^3-(y+z)^3 = [(x+y)-(y+z)][(x+y)^2+(x+y)(y+z)+(y+z)^2] =$$
$$= (x-z)[(x+y)^2+(x+y)(y+z)+(y+z)^2], \text{ czyli}$$
$$(x-z)[(x+y)^2+(x+y)(y+z)+(y+z)^2+8] = 0.$$

Wobec tego

$$x = z \qquad \text{lub} \qquad (x+y)^2+(x+y)(y+z)+(y+z)^2+8 = 0.$$

Druga z powyższych równości zachodzić jednak nie może, gdyż oznaczając $a = x+y$ i $b = y+z$ stwierdzamy, że

$$(x+y)^2+(x+y)(y+z)+(y+z)^2+8 = a^2+ab+b^2+8 = (a+\tfrac{1}{2}b)^2+\tfrac{3}{4}b^2+8 \geqslant 8.$$

W takim razie $x = z$. Postępując analogicznie z drugim i trzecim równaniem danego układu dochodzimy do wniosku, że $y = x$.

Zatem wszystkie trzy niewiadome muszą być równe: $x = y = z = t$, a cały układ równań przybiera postać $(2t)^3 = 8t$, lub równoważnie $t^3 = t$. Dostajemy stąd trzy możliwe wartości t, którymi są: 0, 1 oraz -1.

Odpowiedź: Rozwiązaniami (x,y,z) danego układu równań są:

$$(0,0,0), \quad (1,1,1), \quad (-1,-1,-1).$$

Zadanie **2**. Znaleźć wszystkie takie pary dodatnich liczb całkowitych (x, y), że liczba $2^x + 5^y$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że $2^x + 5^y = k^2$ dla pewnej liczby całkowitej k.

Liczby k^2 i 2^x dają te same reszty z dzielenia przez 5. Kwadrat liczby całkowitej może dawać tylko resztę 0, 1 lub 4 z dzielenia przez 5, gdyż

$$(5n)^2 = 5 \cdot 5n^2, \quad (5n \pm 1)^2 = 5(5n^2 \pm 2n) + 1, \quad (5n \pm 2)^2 = 5(5n^2 \pm 4n) + 4$$

dla dowolnej liczby całkowitej n, a każdą liczbę całkowitą można przedstawić w postaci $5n$, $5n \pm 1$ lub $5n \pm 2$ dla pewnego n.

Wykażemy z kolei, że reszta z dzielenia liczby 2^x przez 5 jest zależna od reszty z dzielenia liczby x przez 4. Niech bowiem $x = 4m + r$, gdzie m jest liczbą całkowitą oraz $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Wówczas

$$2^x = 2^{4m+r} = (2^4)^m \cdot 2^r = (3 \cdot 5 + 1)^m \cdot 2^r.$$

Wyrażenie $(3 \cdot 5 + 1)^m$ możemy zapisać w postaci sumy składników podzielnych przez 5 oraz liczby 1. Wobec tego liczby 2^x i 2^r dają równe reszty z dzielenia przez 5. Resztami tymi dla $r = 0, 1, 2, 3$ są odpowiednio $1, 2, 4, 3$. Ta reszta ma być równa reszcie z dzielenia liczby k^2, więc albo $r = 0$, albo $r = 2$, zatem x jest liczbą parzystą.

Wobec tego $x = 2z$, gdzie z jest dodatnią liczbą całkowitą. Ponadto

$$5^y = k^2 - 2^x = k^2 - (2^z)^2 = (k - 2^z)(k + 2^z).$$

W takim razie liczby $k - 2^z$ i $k + 2^z$ są dzielnikami potęgi piątki, a więc

$$k - 2^z = 5^\alpha \qquad \text{oraz} \qquad k + 2^z = 5^\beta,$$

gdzie α, β są liczbami całkowitymi spełniającymi warunki $0 \leqslant \alpha < \beta$ i $\alpha + \beta = y$. Gdyby $\alpha > 0$, to liczba $5^\beta - 5^\alpha = 2 \cdot 2^z = 2^{z+1}$ byłaby podzielna przez 5, co nie jest możliwe. Stąd $\alpha = 0$, czyli $k - 2^z = 1$ oraz $k + 2^z = 5^y$. W efekcie

$$5^y = k + 2^z = (k - 2^z) + 2^{z+1} = 1 + 2^{z+1}.$$

Jeżeli teraz $z > 1$, to liczba $5^y = 1 + 2^{z+1}$ daje resztę 1 z dzielenia przez $2^3 = 8$. Z drugiej strony, rozumując tak jak dla rozpatrywanej wcześniej liczby $(3 \cdot 5 + 1)^m$ wnioskujemy, że dla nieparzystej wartości $y = 2s + 1$ liczba

$$5^y = 25^s \cdot 5 = (3 \cdot 8 + 1)^s \cdot 5$$

daje resztę 5 z dzielenia przez 8. W konsekwencji y jest liczbą parzystą. Ale skoro $y = 2t$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej t, to

$$2^{z+1} = 5^y - 1 = (5^t)^2 - 1 = (5^t - 1)(5^t + 1).$$

W rezultacie liczby 5^t-1 oraz 5^t+1 są potęgami dwójki o nieujemnych całkowitych wykładnikach, różniącymi się o 2. Tak więc $5^t-1=2$ i $5^t+1=4$, co prowadzi do niedorzecznej równości $5^t=3$.

Zatem $z=1$, czyli $x=2$ oraz $5^y=1+2^{z+1}=1+2^2=5$, skąd $y=1$. Uzyskana para $(x,y)=(2,1)$ oczywiście spełnia warunki zadania: $2^2+5^1=9=3^2$.

Odpowiedź: Jedyną parą o żądanych własnościach jest $(x,y)=(2,1)$.

Zadanie **3**. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AC i BC, przy czym $AE=AD$ i $BF=BD$. Punkt S jest symetryczny do punktu C względem środka okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wykazać, że $SE=SF$.

Rozwiązanie

Sposób **I**

Odcinek CS jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wobec tego $\sphericalangle SAC=\sphericalangle SBC=90^\circ$ (rys. 1). Na podstawie twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkątów SAC i SBC otrzymujemy

$$AS^2+AC^2=CS^2=BS^2+BC^2. \tag{1}$$

Z kolei rozpatrując trójkąty prostokątne CDA i CDB dostajemy

$$AC^2-AD^2=CD^2=BC^2-BD^2. \tag{2}$$

Łącząc zależności (1) i (2) stwierdzamy, że

$$AS^2-BS^2=BC^2-AC^2=BD^2-AD^2. \tag{3}$$

Na mocy danych w treści zadania równości $AE=AD$ i $BF=BD$ możemy przepisać związek (3) w postaci

$$AS^2-BS^2=BF^2-AE^2,$$

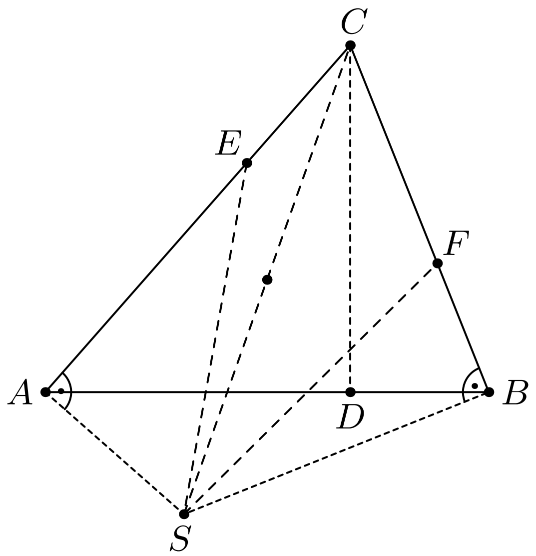
skąd w myśl twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów SAE i SBF uzyskujemy

$$SE^2=AS^2+AE^2=BS^2+BF^2=SF^2,$$

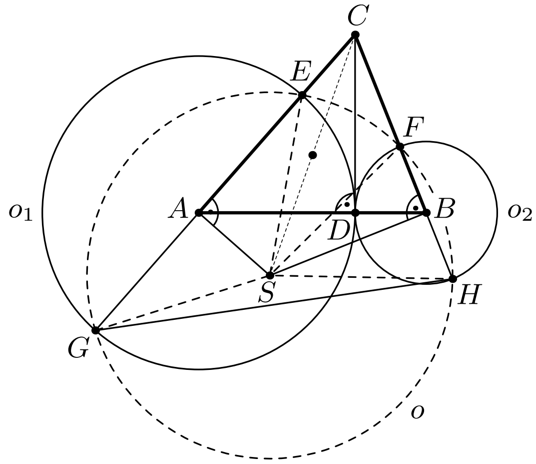
a więc $SE=SF$, co kończy rozwiązanie.

Sposób **II**

Odbijmy symetrycznie punkt E względem punktu A oraz punkt F względem punktu B, otrzymując odpowiednio punkty G oraz H (rys. 2). Wówczas z zależności $AE=AD$ i $BF=BD$ wynika, że punkty D, E i G leżą na okręgu o_1 o środku A,



Rysunek 1



Rysunek 2

a punkty D, F i H leżą na okręgu o_2 o środku B. Ponadto prosta CD, prostopadła do promieni AD okręgu o_1 i BD okręgu o_2, jest styczna do obu tych okręgów w punkcie D. Zatem stosując twierdzenie o stycznej i siecznej do okręgów o_1 i o_2 uzyskujemy równości

$$CE \cdot CG = CD^2 = CF \cdot CH.$$

Wobec tego punkty E, G, F, H leżą na jednym okręgu o.

Kąty SAC i SBC są proste, gdyż w myśl założeń zadania są one oparte na średnicy SC okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkty A i B są zaś środkami odpowiednio cięciw EG i FH okręgu o. W efekcie proste SA i SB są odpowiednio symetralnymi tych cięciw, czyli przechodzą przez środek okręgu o. Jego środkiem jest więc punkt S, co dowodzi, że $SE = SF$.

Zadanie **4**. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 1$. Dla niepustego podzbioru X zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ niech a i b oznaczają odpowiednio najmniejszy i największy element zbioru X oraz niech

$$f(X) = \frac{1}{n - (b - a)}.$$

Wyznaczyć, w zależności od n, sumę liczb $f(X)$ dla wszystkich niepustych podzbiorów X zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Rozwiązanie

Rozważmy dowolną parę liczb $a \leqslant b$ ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Obliczymy sumę liczb $f(X)$ dla wszystkich podzbiorów X, których najmniejszy i największy element są odpowiednio równe a i b. Jeżeli $a = b$, to X jest zbiorem jednoelementowym oraz $f(X) = \frac{1}{n}$. Suma liczb $f(X)$ dla wszystkich jednoelementowych zbiorów X wynosi w takim razie 1. Przyjmijmy dalej, że $a < b$.

Dowolny podzbiór X, którego najmniejszy i największy element są odpowiednio równe a i b, można zapisać w postaci

$$X = \{a, b\} \cup Y,$$

gdzie Y jest dowolnym podzbiorem zbioru $Y_{a,b}$, złożonego z liczb całkowitych większych od a i mniejszych od b.

Zbiór $Y_{a,b}$ ma $b - a - 1$ elementów, a więc 2^{b-a-1} podzbiorów. Stąd wniosek, że suma liczb $f(X)$ dla wszystkich podzbiorów X o najmniejszym elemencie a i największym elemencie b wynosi

$$s_{a,b} = \frac{1}{n - (b - a)} \cdot 2^{b-a-1}.$$

Poszukiwana w zadaniu wielkość jest o 1 większa od sumy liczb $s_{a,b}$ uzyskanych dla wszystkich par liczb $a < b$ ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dla każdej liczby $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ istnieje dokładnie $n - r$ par, w których $b - a = r$: są to mianowicie pary $(a, b) = (1, r+1), (2, r+2), (3, r+3), \ldots, (n-r, n)$. Dla każdej z tych par liczba $s_{a,b}$ jest taka sama i wynosi

$$\frac{1}{n - r} \cdot 2^{r-1},$$

czyli suma tych $n - r$ liczb $s_{a,b}$ jest równa 2^{r-1}. Wobec tego suma wszystkich liczb $s_{a,b}$ jest równa sumie liczb 2^{r-1} dla $r = 1, 2, \ldots, n-1$, a szukana suma wszystkich liczb $f(X)$ wynosi

$$1 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-2} = \mathbf{2^{n-1}}.$$

Zadanie **5**. Znaleźć wszystkie takie ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_{63})$ złożone z różnych dodatnich liczb całkowitych, że dla $i = 1, 2, \ldots, 62$ liczba a_i jest dzielnikiem liczby $1 + a_{i+1}$, zaś liczba a_{63} jest dzielnikiem liczby $1 + a_1$.

Rozwiązanie

Będziemy szukać ciągów spełniających warunki zadania, w których a_1 jest największym wyrazem. Pozostałe ciągi otrzymamy wówczas w wyniku cyklicznego przestawienia wyrazów.

Niech więc $(a_1, a_2, \ldots, a_{63})$ będzie ciągiem o żądanej własności, przy czym pierwszy wyraz jest większy od wszystkich pozostałych. Udowodnimy indukcyjnie, że

$$a_i = a_1 + 1 - i \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, 63. \tag{1}$$

Dla $i = 1$ równość (1) jest oczywiście prawdziwa. Przypuśćmy z kolei, że jest ona prawdziwa dla wskaźników $i = 1, 2, \ldots, j$, gdzie $j \in \{1, 2, \ldots, 62\}$; wykażemy jej słuszność dla $i = j + 1$. W myśl warunków zadania liczba a_j jest dzielnikiem liczby $1 + a_{j+1}$, skąd $a_j \leqslant 1 + a_{j+1}$ i wobec tego

$$a_{j+1} \geqslant a_j - 1 = a_1 - j. \tag{2}$$

Jednak na mocy założenia indukcyjnego liczby a_1, a_2, …, a_j są odpowiednio równe a_1, $a_1 - 1$, …, $a_1 - j + 1$. A ponieważ wyrazy rozważanego ciągu są różnymi liczbami całkowitymi, więc zależność (2) oznacza, że $a_{j+1} = a_1 - j$ albo $a_{j+1} > a_1$. To drugie nie jest możliwe, gdyż a_1 jest największym wyrazem ciągu. Zatem $a_{j+1} = a_1 - j$. W ten sposób uzyskaliśmy równość (1) dla $i = j + 1$, co kończy indukcję.

Na odwrót: w dowolnym ciągu zadanym wzorem (1) dla $i = 1, 2, \ldots, 62$ liczba a_i jest równa liczbie $1 + a_{i+1}$ i tym bardziej jest jej dzielnikiem.

Ponadto dodatni wyraz $a_{63} = a_1 - 62$ jest dzielnikiem liczby $1 + a_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest dzielnikiem liczby $1 + a_1 - (a_1 - 62) = 63$. To zaś ma miejsce, gdy $a_1 - 62 \in \{1, 3, 7, 9, 21, 63\}$, czyli gdy $a_1 \in \{63, 65, 69, 71, 83, 125\}$.

Pozostaje wykonać cykliczne permutacje otrzymanych powyżej 6 ciągów, aby otrzymać wszystkie rozwiązania.

Odpowiedź: Rozwiązaniami zadania są poniższe ciągi oraz ich cykliczne przestawienia:

$(63, 62, 61, \ldots, 1)$, $(71, 70, 69, \ldots, 9)$, $(65, 64, 63, \ldots, 3)$,
$(83, 82, 81, \ldots, 21)$, $(69, 68, 67, \ldots, 7)$, $(125, 124, 123, \ldots, 63)$.

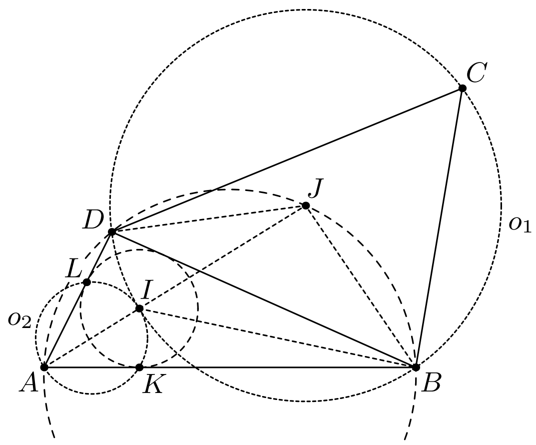
Zadanie **6**. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzi równość

$$\sphericalangle DAB + 2\sphericalangle BCD = 180^\circ. \tag{1}$$

Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boków AB i AD odpowiednio w punktach K i L. Wykazać, że okręgi opisane na trójkątach AKL i BCD są styczne.

Rozwiązanie

Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABD oraz niech J oznacza środek okręgu o_1 opisanego na trójkącie BCD (rys. 3).



Rysunek 3

Z równości (1) wynika, że kąt BCD jest ostry. Zatem punkty J i C leżą po tej samej stronie prostej BD oraz ma miejsce związek $\sphericalangle BJD = 2\sphericalangle BCD$. To wraz z zależnością (1) dowodzi, że na czworokącie $ABJD$ można opisać okrąg. A skoro $JB = JD$, więc $\sphericalangle BAJ = \sphericalangle JAD$ i w rezultacie punkt J leży na dwusiecznej kąta DAB, czyli na prostej AI.

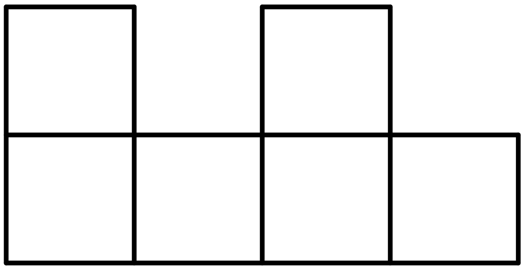
Zauważmy następnie, że

$$\sphericalangle BIJ = 180^\circ - \sphericalangle AIB = \sphericalangle IAB + \sphericalangle IBA = \tfrac{1}{2}(\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABD) = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle BDA)$$

oraz $\sphericalangle BDA = \sphericalangle BJA$. Stąd wniosek, że trójkąt BIJ jest równoramienny: $JB = JI$. W takim razie punkt I leży na okręgu o_1.

Ponadto odcinek AI jest średnicą okręgu o_2 opisanego na trójkącie AKL, gdyż $\sphericalangle IKA = \sphericalangle ILA = 90^\circ$. Wobec tego okręgi o_1 i o_2 mają punkt wspólny I, a przy tym środki tych okręgów oraz punkt I leżą na jednej prostej — dwusiecznej kąta DAB. To zaś oznacza, że okręgi o_1 i o_2 są styczne w punkcie I.

Zadanie **7**. Znaleźć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (m, n), dla których prostokąt o wymiarach $m \times n$ można zbudować z następujących klocków utworzonych z 6 kwadratów jednostkowych:

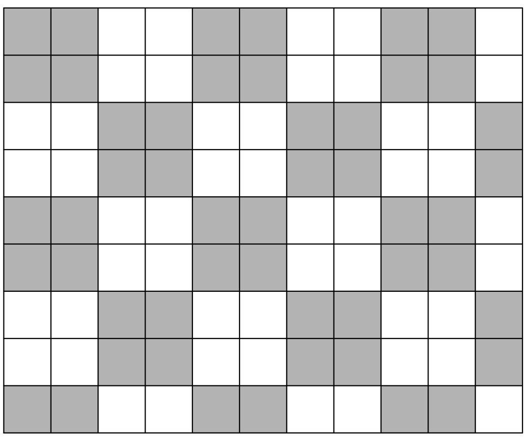


Rysunek 4

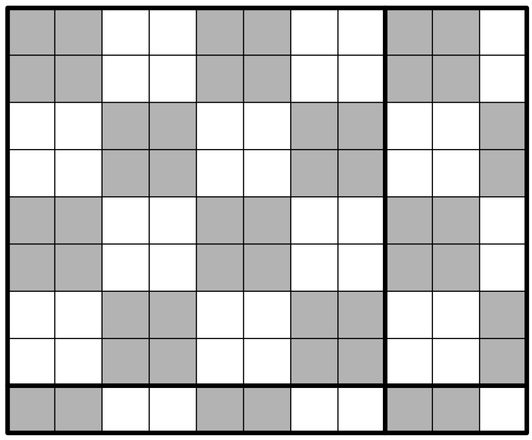
Klocki wolno obracać i odwracać na drugą stronę.

Rozwiązanie

Podzielmy dany prostokąt $m \times n$ na kwadraty 2×2, rozpoczynając od lewego górnego rogu. Jeśli przynajmniej jedna z liczb m, n jest nieparzysta, to przy prawym lub dolnym brzegu zamiast kwadratów umieszczamy prostokąty 1×2, a w prawym dolnym rogu w razie potrzeby umieszczamy kwadrat jednostkowy (rys. 5). Następnie pomalujmy otrzymane kwadraty i prostokąty na biało i czarno tak, aby dwie figury o wspólnym boku miały różne kolory, a kwadrat w lewym górnym rogu był czarny. Na koniec podzielmy wszystkie te figury na kwadraty jednostkowe, które będziemy krótko nazywać polami.



Rysunek 5



Rysunek 6

Zauważmy teraz, że dowolny klocek zawsze pokrywa 3 pola białe oraz 3 pola czarne: rzeczywiście, dowolny prostokąt 1×4 pokrywa dwa pola białe oraz dwa czarne, natomiast dowolna para kwadratów jednostkowych leżących w linii pionowej lub poziomej i oddzielona jednym polem pokrywa jedno pole białe i jedno czarne. Wobec tego jeżeli prostokąt $m \times n$ można zbudować z klocków, to znajduje się w nim tyle samo pól białych i czarnych.

Z drugiej strony, podzielmy liczby m i n przez 4, otrzymując odpowiednio ilorazy q_m i q_n oraz reszty r_m i r_n. Mamy więc

$$m = 4q_m + r_m \quad \text{oraz} \quad n = 4q_n + r_n, \qquad \text{gdzie } r_m, r_n \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Prostokąt $m \times n$ możemy podzielić na prostokąty: $4q_m \times 4q_n$ przyległy do lewego górnego rogu, $4q_m \times r_n$, $r_m \times 4q_n$ oraz $r_m \times r_n$ (rys. 6; niektóre z tych prostokątów mogą nie występować, gdy któraś z liczb m, n jest podzielna przez 4). Każdy z prostokątów $4q_m \times 4q_n$, $4q_m \times r_n$, $r_m \times 4q_n$ daje się podzielić na prostokąty 1×4 i w związku z tym zawiera tyle samo pól białych i czarnych. Zbadajmy teraz, kiedy prostokąt $r_m \times r_n$ — o ile istnieje — zawiera tyle samo pól białych i czarnych. Liczba pól takiego prostokąta musi być parzysta, czyli ma on wymiary 1×2, 2×1, 2×2, 3×2 lub 2×3. Jednak trzy pierwsze prostokąty składają się wyłącznie z czarnych pól, a ostatnie dwa zawierają czarny kwadrat 2×2 w lewym górnym rogu (korzystamy tu z faktu, że do lewego górnego rogu wyjściowego prostokąta $m \times n$ przylega czarny kwadrat 2×2). Tak więc jeśli $r_m \geqslant 1$ i $r_n \geqslant 1$, to w prostokącie $r_m \times r_n$ liczby pól białych i czarnych są różne. W rezultacie liczba pól białych w prostokącie $m \times n$ nie jest równa liczbie pól czarnych, gdy liczby m i n nie są podzielne przez 4.

Zatem jeżeli para (m, n) ma postulowaną w zadaniu własność, to jedna z liczb m, n musi być podzielna przez 4. Ponadto oczywiście jedna z nich musi być podzielna przez 3, gdyż każdy klocek pokrywa liczbę pól podzielną przez 3. W takim razie mamy dwie możliwości:

1. Jedna z liczb m, n jest podzielna przez 4, a druga — przez 3.

2. Jedna z liczb m, n jest podzielna przez 12.

W przypadku **1** prostokąt $m \times n$ można podzielić na prostokąty 4×3, z których każdy daje się ułożyć z dwóch klocków. Wszystkie takie pary (m, n) spełniają więc warunki zadania.

Przejdźmy z kolei do przypadku **2**; możemy przyjąć, że dany w zadaniu prostokąt ma wówczas wymiary $12m' \times n$, gdzie m', n są dodatnimi liczbami całkowitymi. Przypuśćmy, że liczbę n można zapisać w postaci

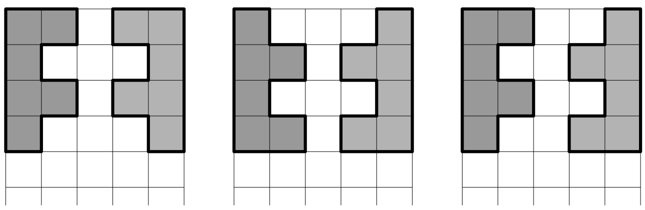
$$n = 3k + 4\ell, \tag{1}$$

gdzie k, ℓ są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Wtedy rozważany prostokąt można podzielić na k prostokątów 12×3 oraz ℓ prostokątów 12×4. Każdy z takich prostokątów można rozbić na prostokąty 4×3, które — jak wiemy — składają się z dwóch klocków.

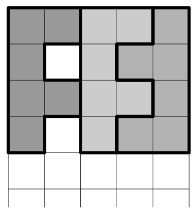
W postaci (1) można przedstawić liczby $n = 3, 4$ oraz wszystkie liczby $n \geqslant 6$, gdyż dla każdej liczby całkowitej $t \geqslant 0$ prawdziwe są równości

$$6 + 3t = 3 \cdot (t + 2) + 4 \cdot 0, \quad 7 + 3t = 3 \cdot (t + 1) + 4 \cdot 1, \quad 8 + 3t = 3 \cdot t + 4 \cdot 2.$$

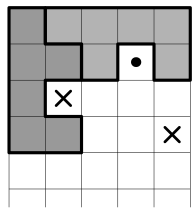
To dowodzi, że pary $(m,n) = (12m', n)$, w których $n \notin \{1,2,5\}$, mają żądaną własność. Pozostaje jeszcze zbadać przypadki $n = 1,2,5$.



Rysunek 7



Rysunek 8



Rysunek 9

Prostokątów $12m' \times 1$ i $12m' \times 2$ oczywiście nie da się zbudować z klocków. Wykażemy, iż jest to niemożliwe również dla prostokątów $12m' \times 5$. Rozważmy bowiem dwa rogi takiego prostokąta będące końcami boku o długości 5 oraz dwa klocki przyległe do takich rogów. Gdyby te dwa klocki nie pokrywały całego boku (rys. 7), to po umieszczeniu trzeciego klocka przyległego do brakującej części boku pozostałoby jedno puste pole otoczone ze wszystkich stron klockami (rys. 8). Zatem te dwa narożne klocki muszą pokrywać cały bok (rys. 9); wtedy jednak pokrycie pola oznaczonego kropką na rys. 9 sprawia, że jedno z pól oznaczonych krzyżykiem zostanie otoczone klockami. Zbudowanie z klocków prostokąta o wymiarach $12m' \times 5$ nie jest więc możliwe.

Odpowiedź: Warunki zadania spełniają pary (m,n), w których jedna z liczb jest podzielna przez 3, a druga przez 4, oraz pary, w których jedna z liczb jest podzielna przez 12, a druga jest różna od 1, 2 i 5.

Zadanie **8**. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f określone na zbiorze liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość

$$f(x+f(x+y)) = f(x-y) + f(x)^2. \tag{1}$$

Rozwiązanie

Sposób **I**

Niech t będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Podstawiając $x = t + f(t)$ oraz $y = -f(t)$ w równaniu (1) otrzymujemy zależność

$$f(t+2f(t)) = f(t+2f(t)) + f(t+f(t))^2,$$

z której wynika, że

$$f(t+f(t)) = 0. \tag{2}$$

Przyjmując zaś $x = t$ i $y = 0$ w związku (1) uzyskujemy

$$f(t+f(t)) = f(t) + f(t)^2. \tag{3}$$

Łącząc równości (2) i (3) stwierdzamy, że $f(t) + f(t)^2 = 0$. W rezultacie

$$f(t) = 0 \quad \text{lub} \quad f(t) = -1 \qquad \text{dla każdej liczby rzeczywistej } t. \tag{4}$$

Przypuśćmy, że istnieje liczba rzeczywista a, dla której $f(a) = -1$. Dla dowolnie wybranej liczby rzeczywistej s podstawmy wówczas wartości $x = a$ oraz $y = a - s$ w równaniu (1). Dostajemy zależność

$$f(a+f(2a-s)) = f(s) + 1;$$

w myśl związku (4) może ona mieć miejsce tylko wtedy, gdy $f(a+f(2a-s)) = 0$ i $f(s) = -1$. To wraz z dowolnością liczby s dowodzi, że f jest funkcją stałą równą -1. Jednak wtedy warunek (1) staje się fałszywą równością $-1 = 0$.

Zatem $f(t) = 0$ dla każdego t. Funkcja ta oczywiście spełnia zależność (1).

Sposób **II**

Niech $c = f(0)$. Podstawmy $x = c$ i $y = -c$ w równaniu (1); otrzymujemy $f(2c) = f(2c) + f(c)^2$, skąd

$$f(c) = 0. \tag{5}$$

Przyjmijmy z kolei $x = \frac{1}{2}(c+t)$ oraz $y = \frac{1}{2}(c-t)$ w zależności (1), gdzie t jest dowolną liczbą rzeczywistą. Wówczas $x + y = c$ i $x - y = t$, a więc uwzględniając równość (5) uzyskujemy $f(x) = f(t) + f(x)^2$ i wobec tego

$$f(t) = f(x) - f(x)^2 = \tfrac{1}{4} - (\tfrac{1}{2} - f(x))^2 \leqslant \tfrac{1}{4} \tag{6}$$

dla każdego t.

Podstawmy teraz w (1) wartości $x = y = 0$. Dostajemy $f(c) = c + c^2$ i na podstawie związku (5) wnioskujemy, że $c = 0$ lub $c = -1$. Załóżmy, że $c = -1$. Wówczas przyjmując $x = 0$ i $y = 1$ w warunku (1) stwierdzamy w oparciu o (5), że $f(f(1)) = f(-1) + f(0)^2 = f(c) + c^2 = 1$. To przeczy nierówności (6) dla $t = f(1)$ i w takim razie

$$c = f(0) = 0. \tag{7}$$

Przypuśćmy, że istnieje liczba rzeczywista b, dla której $f(b) \neq 0$. Niech $x_0 = b + f(2b)$; podstawiając $x = y = b$ w równaniu (1) i stosując zależność (7) uzyskujemy $f(x_0) = f(b)^2 > 0$. Określmy ciągi $x_1, x_2, x_3, \ldots$ oraz $y_0, y_1, y_2, \ldots$ w następujący sposób:

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n) \quad \text{oraz} \quad y_n = f(x_n) \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Wówczas dla każdego n podstawiając $x = x_n$ i $y = 0$ w warunku (1) dostajemy

$$f(x_{n+1}) = f(x_n + f(x_n)) = f(x_n) + f(x_n)^2,$$

czyli

$$y_{n+1} = y_n + y_n^2 \tag{8}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$. Stąd wynika, że $y_{n+1} \geqslant y_n$ dla każdego $n \geqslant 0$ i w rezultacie $y_n^2 \geqslant y_0^2$, gdyż $y_0 = f(x_0) > 0$. Zatem z równości (8) otrzymujemy

$$y_{n+1} \geqslant y_n + y_0^2 \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots,$$

skąd wniosek, że dla dowolnego $n \geqslant 1$ mamy

$$f(x_n) = y_n = (y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + \ldots + (y_2 - y_1) + (y_1 - y_0) + y_0 > ny_0^2.$$

Wybierając teraz liczbę n, dla której $ny_0^2 > \frac{1}{4}$, dostajemy sprzeczność z zależnością (6).

Założenie, że funkcja f przyjmuje wartość różną od zera, okazało się fałszywe. Pozostaje zauważyć, że funkcja zerowa spełnia warunki zadania.

Odpowiedź: Jedyną funkcją spełniającą równanie (1) jest funkcja zerowa.

Zadanie **9**. Wyznaczyć wszystkie takie liczby całkowite $n \geqslant 1$, że liczba $1 + 2^{n+1} + 4^{n+1}$ jest podzielna przez liczbę $1 + 2^n + 4^n$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że

$$1 + 2^n + 4^n < 1 + 2^{n+1} + 4^{n+1} < 4 + 2^{n+2} + 4^{n+1} = 4(1 + 2^n + 4^n).$$

Zatem jeżeli liczba $1 + 2^{n+1} + 4^{n+1}$ jest wielokrotnością liczby $1 + 2^n + 4^n$, to musi zachodzić jedna z równości

$$1 + 2^{n+1} + 4^{n+1} = 2(1 + 2^n + 4^n) \qquad \text{lub} \qquad 1 + 2^{n+1} + 4^{n+1} = 3(1 + 2^n + 4^n).$$

Pierwsza z powyższych równości nie jest jednak możliwa, gdyż jej lewa strona jest nieparzysta, prawa zaś — parzysta. Sprawdźmy z kolei, czy możliwa jest druga równość. Liczba $1+2^{n+1}+4^{n+1}$ daje resztę 1 z dzielenia przez 4 dla każdego $n \geqslant 1$. Ponadto dla $n \geqslant 2$ liczba $3(1+2^n+4^n) = 3+3\cdot 2^n+3\cdot 4^n$ daje resztę 3 z dzielenia przez 4. Obie liczby mogą więc być równe tylko wtedy, gdy $n = 1$; bez trudu sprawdzamy, iż istotnie tak jest: $1 + 2^2 + 4^2 = 21 = 3(1 + 2 + 4)$.

Odpowiedź: Jedyną liczbą o opisanej własności jest $n = 1$.

Zadanie **10**. Znaleźć wszystkie takie liczby całkowite $n \geqslant 2$, że istnieje zbiór n punktów na płaszczyźnie, z których każdy leży na zewnątrz pewnego koła, zawierającego wszystkie pozostałe punkty i mającego środek w jednym z nich.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że zbiór n punktów na płaszczyźnie spełnia wymagane warunki. Wybierzmy jeden z tych punktów; oznaczmy go przez P. W myśl założeń zadania wśród pozostałych punktów istnieje taki punkt Q, że koło o środku Q i pewnym promieniu zawiera wszystkie punkty danego zbioru oprócz punktu P (jeśli jest kilka takich punktów Q, wybieramy tylko jeden z nich). Narysujmy teraz strzałkę od punktu P do punktu Q. W tej sytuacji punkt P jest najbardziej oddalonym od Q punktem rozważanego zbioru.

Powtarzając tę procedurę dla wszystkich n punktów narysujemy łącznie n strzałek. Z każdego punktu wychodzi dokładnie jedna strzałka. Zauważmy, że również do każdego punktu wchodzi dokładnie jedna strzałka. W przeciwnym bowiem razie — skoro liczba końców strzałek jest równa liczbie punktów — do pewnego punktu R wchodziłyby co najmniej dwie strzałki. To nie jest jednak możliwe, gdyż jeśli takie dwie strzałki wychodziłyby z różnych punktów R_1 i R_2, to na mocy spostrzeżenia z ostatniego zdania poprzedniego akapitu punkt R_1 byłby bardziej odległy od R niż punkt R_2 i jednocześnie punkt R_2 byłby bardziej odległy od R niż punkt R_1.

Wobec tego startując w dowolnym punkcie danego zbioru możemy przechodzić po strzałkach zgodnie z ich kierunkami do kolejnych punktów zbioru. W pewnym momencie powrócimy do punktu odwiedzonego już wcześniej. I to do punktu początkowego — powrót do punktu, który nie był pierwszy na tej trasie, oznaczałby bowiem, że do tego punktu wchodzą dwie różne strzałki, a wiemy, że nie jest to możliwe. Przebyta ścieżka jest więc cyklem rozpoczynającym się i kończącym w tym samym punkcie. Początkowy punkt wybraliśmy dowolnie, zatem cały układ strzałek rozpada się na takie cykle.

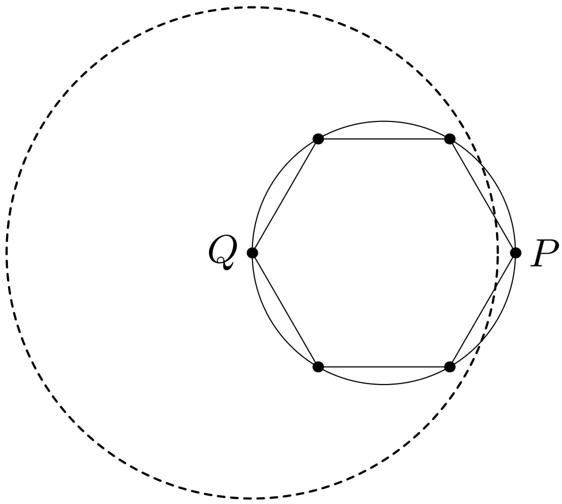
Przypuśćmy, że taki cykl $S_1 \to S_2 \to S_3 \to \ldots \to S_n \to S_1$ składa się z co najmniej 3 strzałek. Istnienie strzałki $S_1 \to S_2$ oznacza, że punkt S_1 jest bardziej odległy od S_2, niż dowolny inny punkt rozpatrywanego zbioru. A skoro $S_3 \neq S_1$, więc otrzymujemy nierówność $S_1S_2 > S_2S_3$. Podobnie uzasadniamy, że

$$S_2S_3 > S_3S_4 > \ldots > S_{n-1}S_n > S_nS_1 > S_1S_2\,,$$

czyli uzyskujemy sprzeczność. Stąd wniosek, że dowolny cykl składa się z dwóch strzałek, wzajemnie „przeciwnych” do siebie. Każdy punkt danego zbioru należy do pewnego takiego cyklu i w takim razie liczba tych punktów musi być parzysta.

Wykażemy teraz, że dla dowolnej liczby parzystej n istnieje na płaszczyźnie zbiór n punktów o żądanej własności. Dla $n = 2$ to stwierdzenie jest oczywiste — wystarczy rozważyć jakikolwiek zbiór dwóch różnych punktów.

Udowodnimy z kolei, że dla każdej liczby parzystej $n \geqslant 4$ zbiór wierzchołków n-kąta foremnego spełnia warunki zadania. Niech bowiem P będzie dowolnym wierzchołkiem n-kąta foremnego. Liczba n jest parzysta, istnieje więc wierzchołek Q (przeciwległy do wierzchołka P) o tej własności, że odcinek PQ jest średnicą okręgu zawierającego wszystkie n wierzchołków. Zatem dowolny wierzchołek różny od P znajduje się w mniejszej odległości od Q niż wierzchołek P (rys. 10). A stąd wynika, że pewne koło o środku Q zawiera wszystkie wierzchołki n-kąta z wyjątkiem P. Wobec tego rozpatrywany zbiór ma wymaganą własność.



Rysunek 10

Odpowiedź: Szukanymi liczbami są wszystkie dodatnie liczby parzyste.

Zadanie **11**. W ostrosłupie o podstawie ABC i wierzchołku S wysokości AA', BB', CC', SS' przecinają się w jednym punkcie, leżącym wewnątrz ostrosłupa. Punkt O jest środkiem sfery opisanej na danym ostrosłupie. Dowieść, że jeśli prosta SO jest prostopadła do płaszczyzny $A'B'C'$, to ostrosłup $ABCS$ jest prawidłowy.

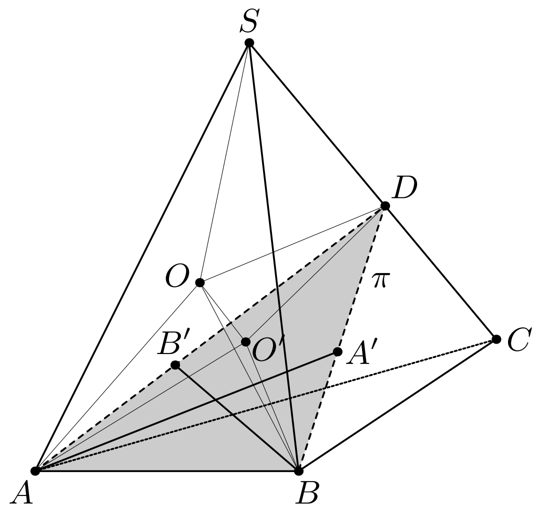
Rozwiązanie

Odcinki AA' i BB' przecinają się wewnątrz ostrosłupa, zatem leżą one na jednej płaszczyźnie π, która przecina krawędź CS w pewnym punkcie D (rys. 11).

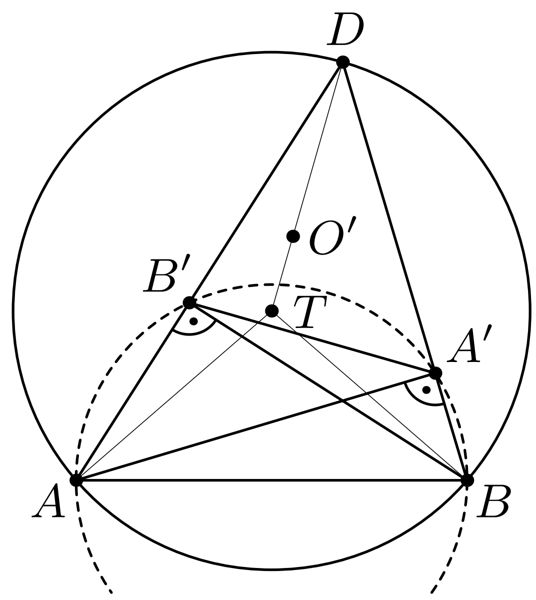
Prosta AA' jest prostopadła do płaszczyzny BCS, a więc także do zawartej w tej płaszczyźnie prostej CS. Analogicznie uzasadniamy prostopadłość prostych BB' i CS. Zatem dwie nierównoległe proste leżące na płaszczyźnie π — proste AA' oraz BB' — są prostopadłe do prostej CS. Wynika stąd, że cała płaszczyzna π jest prostopadła do prostej CS. Oznacza to w szczególności, że rzutem prostokątnym punktu S na płaszczyznę π jest punkt D.

Niech O' oznacza rzut prostokątny punktu O na płaszczyznę π. Na mocy założeń zadania prosta SO jest prostopadła do płaszczyzny $A'B'C'$ i tym bardziej do zawartej w niej prostej $A'B'$. Wobec tego — w myśl twierdzenia o trzech prostych prostopadłych — prosta DO', będąca rzutem prostokątnym prostej SO na płaszczyznę π, jest prostopadła do prostej $A'B'$.

Ponadto punkt O jest środkiem sfery opisanej na ostrosłupie $ABCS$, więc zachodzi równość $OA = OB$ i stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkątów prostokątnych $OO'A$ oraz $OO'B$ uzyskujemy zależność $O'A = O'B$.



Rysunek 11



Rysunek 12

Dalsza część rozumowania rozgrywa się na płaszczyźnie π (rys. 12). Odcinki AA' oraz BB' są wysokościami trójkąta ABD i przecinają się w jego wnętrzu.

Trójkąt ten jest zatem ostrokątny, czyli środek T opisanego na nim okręgu również leży wewnątrz trójkąta. Udowodnimy, że punkty D, O' oraz T leżą na jednej prostej. Okrąg o średnicy AB przechodzi przez punkty A' i B', skąd wyznaczamy $\sphericalangle B'A'D = 180^\circ - \sphericalangle B'A'B = \sphericalangle DAB$. Zatem z prostopadłości $DO' \perp A'B'$ otrzymujemy

$$\sphericalangle O'DB = 90^\circ - \sphericalangle B'A'D = 90^\circ - \sphericalangle DAB.$$

Z drugiej strony, w trójkącie równoramiennym DTB mamy

$$\sphericalangle TDB = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle DTB) = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\sphericalangle DAB) = 90^\circ - \sphericalangle DAB.$$

W efekcie $\sphericalangle O'DB = \sphericalangle TDB$, co dowodzi, że punkt O' leży na prostej DT.

Zauważona wcześniej równość $O'A = O'B$ oznacza z kolei, że punkt O' leży na symetralnej boku AB.

Jeżeli $AD \neq BD$, to symetralna boku AB nie jest równoległa do prostej DT, a obie proste przecinają się w punkcie T. Ale punkt O' leży — jak wykazaliśmy — na obu tych prostych. Zatem punkt $O' = T$ jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABD, co daje $O'A = O'D$. Twierdzenie Pitagorasa dla trójkątów prostokątnych $OO'A$ i $OO'D$ prowadzi teraz do związku $OA = OD$. To jest jednak niemożliwe, gdyż sfera o środku O i promieniu OA jest sferą opisaną na rozważanym ostrosłupie, zaś punkt D znajduje się wewnątrz krawędzi bocznej CS, a więc nie może jednocześnie leżeć na tej sferze.

Wobec tego musi zachodzić równość $AD = BD$. Stąd oraz z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkątów prostokątnych ADC i BDC oraz do trójkątów prostokątnych ADS i BDS dostajemy $AC = BC$ oraz $AS = BS$. Analogiczne rozumowanie dowodzi, że $AB = CB$ oraz $AS = CS$. W rezultacie $AB = AC = BC$ i $SA = SB = SC$, czyli ostrosłup $ABCS$ jest prawidłowy.

Zadanie **12**. Mając dany skończony ciąg liczb, tworzymy z niego nowy ciąg, wstawiając pomiędzy każdą parę kolejnych wyrazów nowy wyraz, równy ich sumie. Rozpoczynamy od ciągu $(1,1)$ i wykonujemy wielokrotnie tę operację, otrzymując w pierwszym kroku ciąg $(1,2,1)$, w drugim kroku ciąg $(1,3,2,3,1)$ itd.

Dla każdego $n \geqslant 1$ obliczyć sumę sześcianów wyrazów ciągu otrzymanego w n-tym kroku.

Rozwiązanie

Sposób **I**

Dla $n = 0,1,2,\ldots$ niech S_n oznacza sumę sześcianów wyrazów ciągu uzyskanego po wykonaniu n operacji; w szczególności mamy $S_0 = 1^3 + 1^3 = 2$ oraz $S_1 = 1^3 + 2^3 + 1^3 = 10$.

Znajdziemy zależność pomiędzy liczbami S_n i S_{n+1} dla dowolnego $n \geqslant 1$.

Ustalmy wartość $n \geqslant 1$ oraz niech $(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ będzie ciągiem otrzymanym po wykonaniu $n-1$ kroków. Zatem $x_0 = x_k = 1$ oraz

$$S_{n-1} = x_0^3 + x_1^3 + \ldots + x_{k-1}^3 + x_k^3. \tag{1}$$

W n-tym kroku dostajemy ciąg

$$(x_0\,,\ x_0{+}x_1\,,\ x_1\,,\ x_1{+}x_2\,,\ x_2\,,\ \ldots\,,\ x_{k-2}\,,\ x_{k-2}{+}x_{k-1}\,,\ x_{k-1}\,,\ x_{k-1}{+}x_k\,,\ x_k)$$

i wobec tego

$$\begin{aligned} S_n &= x_0^3 + (x_0+x_1)^3 + x_1^3 + \ldots + x_{k-1}^3 + (x_{k-1}+x_k)^3 + x_k^3 = \\ &= S_{n-1} + (x_0+x_1)^3 + (x_1+x_2)^3 + \ldots + (x_{k-2}+x_{k-1})^3 + (x_{k-1}+x_k)^3. \end{aligned} \tag{2}$$

Dla $i = 0,1,2,\ldots,k-1$ mamy

$$(x_i + x_{i+1})^3 = x_i^3 + x_{i+1}^3 + 3y_i,$$

gdzie oznaczyliśmy $y_i = x_i^2 x_{i+1} + x_i x_{i+1}^2$. Dodając stronami powyższe k równości oraz stosując wzór (1) stwierdzamy, że

$$\begin{aligned} &(x_0+x_1)^3 + (x_1+x_2)^3 + \ldots + (x_{k-2}+x_{k-1})^3 + (x_{k-1}+x_k)^3 = \\ &\qquad = (S_{n-1} - x_k^3) + (S_{n-1} - x_0^3) + 3(y_0 + y_1 + \ldots + y_{k-2} + y_{k-1}) = \\ &\qquad = 2S_{n-1} - 2 + 3(y_0 + y_1 + \ldots + y_{k-2} + y_{k-1}). \end{aligned}$$

W takim razie możemy przepisać zależność (2) w następujący sposób:

$$S_n = 3S_{n-1} - 2 + 3(y_0 + y_1 + \ldots + y_{k-2} + y_{k-1}),$$

a więc

$$3(y_0 + y_1 + \ldots + y_{k-2} + y_{k-1}) = S_n - 3S_{n-1} + 2. \tag{3}$$

Rozważmy teraz ciąg uzyskany w $(n+1)$-szym kroku. Wstawione w tym kroku wyrazy są kolejno równe $2x_0 + x_1$, $x_0 + 2x_1$, $2x_1 + x_2$, $x_1 + 2x_2$, $\ldots$, $2x_{k-1} + x_k$,

$x_{k-1}+2x_k$. Aby obliczyć sumę ich sześcianów — która jest równa różnicy $S_{n+1}-S_n$ — zauważmy najpierw, że

$$(2x_i+x_{i+1})^3+(x_i+2x_{i+1})^3=9x_i^3+9x_{i+1}^3+18y_i$$

dla $i=0,1,2,\ldots,k-1$. Sumując stronami te k równości i ponownie stosując związek (1) dostajemy
$S_{n+1}-S_n=9(S_{n-1}-x_k^3)+9(S_{n-1}-x_0^3)+18(y_0+y_1+\ldots+y_{k-2}+y_{k-1})=$
$=18S_{n-1}-18+18(y_0+y_1+\ldots+y_{k-2}+y_{k-1})$.
Wykorzystując teraz zależność (3) otrzymujemy

$$S_{n+1}-S_n=18S_{n-1}-18+6(S_n-3S_{n-1}+2)=6S_n-6$$

i ostatecznie

$$S_{n+1}=7S_n-6 \qquad \text{dla każdego } n\geqslant 1. \tag{4}$$

Pozostaje już tylko ze wzoru rekurencyjnego (4) wyprowadzić jawny wzór na n-ty wyraz ciągu S_1, S_2, S_3, ... W tym celu zauważmy, że

$$S_{n+1}-1=7S_n-7=7(S_n-1) \qquad \text{dla dowolnego } n\geqslant 1.$$

W efekcie ciąg S_1-1, S_2-1, S_3-1, ... jest ciągiem geometrycznym o ilorazie równym 7 i pierwszym wyrazie równym $S_1-1=9$. Wynika stąd wzór ogólny

$$S_n-1=9\cdot 7^{n-1} \qquad \text{dla każdego } n\geqslant 1,$$

czyli szukana suma sześcianów wynosi $S_n=\mathbf{9\cdot 7^{n-1}+1}$.

Sposób **II**

Rozwiążemy ogólniejsze zadanie. Dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zacznijmy od ciągu (x,y) i wykonujmy wielokrotnie operację opisaną w treści zadania, otrzymując kolejno ciągi $(x,x+y,y)$, $(x,2x+y,x+y,x+2y,y)$ itd. Wyznaczymy wzór na sumę $S_n(x,y)$ sześcianów wyrazów ciągu uzyskanego w n-tym kroku. Bezpośrednio obliczamy, że $S_0(x,y)=x^3+y^3$ oraz $S_1(x,y)=x^3+(x+y)^3+y^3$.

Wyrażenie $S_n(x,y)$ jest funkcją trzech zmiennych: liczby całkowitej $n\geqslant 0$ oraz liczb rzeczywistych x i y. Dla ustalonej wartości n jest więc ono funkcją dwóch zmiennych x i y. Znajdziemy postać tej funkcji dwóch zmiennych.

Za pomocą indukcji stwierdzamy, że dla każdego $n\geqslant 0$ ciąg otrzymany w n-tym kroku z początkowego ciągu (x,y) składa się z 2^n+1 wyrazów postaci

$$(p_{n,0}x+q_{n,0}y\,,\ p_{n,1}x+q_{n,1}y\,,\ p_{n,2}x+q_{n,2}y\,,\ \ldots\,,\ p_{n,2^n}x+q_{n,2^n}y),$$

gdzie współczynniki $p_{n,k}$ i $q_{n,k}$ dla $k=0,1,2,\ldots,2^n$ są liczbami rzeczywistymi niezależnymi od x i y. Ponadto dla każdego $n\geqslant 0$ rozpoczynając od ciągów (x,y)

i (y,x) oraz wykonując dla każdego z nich n kroków dostajemy dwa ciągi złożone z tych samych wyrazów zapisanych w odwrotnej kolejności. Zatem

$$p_{n,k} = q_{n,2^n-k} \qquad \text{dla } n \geqslant 0 \text{ i } k = 0,1,2,\ldots,2^n. \tag{5}$$

Ustalmy wartość $n \geqslant 0$ i przyjmijmy oznaczenie

$$r_{n,k} = (p_{n,k}x+q_{n,k}y)^3 + (p_{n,2^n-k}x+q_{n,2^n-k}y)^3$$

dla $k = 0,1,2,\ldots,2^n$. Wówczas prawdziwa jest równość

$$S_n(x,y) = \tfrac{1}{2}(r_{n,0} + r_{n,1} + r_{n,2} + \ldots + r_{n,2^n}). \tag{6}$$

Korzystając ze związków (5) obliczamy:
$r_{n,k} = (p_{n,k}x+q_{n,k}y)^3 + (q_{n,k}x+p_{n,k}y)^3 =$
$\quad = (p_{n,k}^3 - p_{n,k}^2 q_{n,k} - p_{n,k}q_{n,k}^2 + q_{n,k}^3)(x^3+y^3) + (p_{n,k}^2 q_{n,k} + p_{n,k}q_{n,k}^2)(x+y)^3.$
Dodając stronami powyższe zależności dla $k = 0,1,2,\ldots,2^n$ stwierdzamy na mocy równości (6), że prawdziwy jest wzór postaci

$$S_n(x,y) = a_n(x^3+y^3) + b_n(x+y)^3, \tag{7}$$

w którym współczynniki a_n i b_n zależą tylko od liczby n. Pozostaje wyznaczyć ich wartości dla każdego $n \geqslant 0$; jak wiemy, $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $a_1 = 1$ oraz $b_1 = 1$.

Wybierzmy dowolne liczby rzeczywiste x i y oraz liczbę całkowitą $n \geqslant 1$. Rozpoczynając od ciągu (x,y) i wykonując jeden krok otrzymujemy ciąg $(x, x+y, y)$, a po wykonaniu $n-1$ kolejnych kroków — ciąg $\mathcal{C}$ o środkowym wyrazie równym $x+y$. Początkowy fragment ciągu $\mathcal{C}$ aż do owego środkowego wyrazu możemy także uzyskać rozpoczynając od ciągu $(x, x+y)$ i wykonując $n-1$ kroków. Analogicznie końcowy fragment ciągu $\mathcal{C}$ od środkowego wyrazu dostajemy rozpoczynając od ciągu $(x+y, y)$. Wynika stąd związek

$$S_n(x,y) = S_{n-1}(x, x+y) + S_{n-1}(x+y, y) - (x+y)^3. \tag{8}$$

Stosując wzór (7) zapisujemy składniki prawej strony zależności (8) w postaci

$$S_{n-1}(x, x+y) = a_{n-1}(x^3 + (x+y)^3) + b_{n-1}(2x+y)^3,$$
$$S_{n-1}(x+y, y) = a_{n-1}((x+y)^3 + y^3) + b_{n-1}(x+2y)^3.$$

To wraz z tożsamością $(2x+y)^3 + (x+2y)^3 = 3(x^3+y^3) + 6(x+y)^3$ pozwala przepisać równość (8) w następujący sposób:

$$a_n(x^3+y^3) + b_n(x+y)^3 = (a_{n-1} + 3b_{n-1})(x^3+y^3) + (2a_{n-1} + 6b_{n-1} - 1)(x+y)^3.$$

Obie strony powyższego związku są wielomianami zmiennych rzeczywistych x i y, przybierającymi równe wartości dla takich samych argumentów. Wielomiany te mają zatem jednakowe współczynniki przy x^3 i x^2y. Wobec tego dla każdego $n \geqslant 1$

$$a_n + b_n = a_{n-1} + 3b_{n-1} + 2a_{n-1} + 6b_{n-1} - 1 \quad \text{oraz} \quad 3b_n = 3(2a_{n-1} + 6b_{n-1} - 1).$$

Stąd otrzymujemy zależności

$$b_n = 2a_{n-1} + 6b_{n-1} - 1 \quad \text{oraz} \quad a_n = a_{n-1} + 3b_{n-1} \qquad \text{dla każdego } n \geqslant 1. \tag{9}$$

Korzystając z równości (9) dochodzimy do wniosku, że

$$b_n = 2(a_{n-1} + 3b_{n-1}) - 1 = 2a_n - 1 \qquad \text{dla dowolnego } n \geqslant 1. \tag{10}$$

Stąd i z drugiego ze związków (9) dla każdego $n \geqslant 2$ uzyskujemy

$$a_n - \tfrac{1}{2} = a_{n-1} + 3(2a_{n-1} - 1) - \tfrac{1}{2} = 7(a_{n-1} - \tfrac{1}{2}).$$

Ciąg $a_1 - \frac{1}{2}$, $a_2 - \frac{1}{2}$, $a_3 - \frac{1}{2}$, ... jest więc ciągiem geometrycznym o ilorazie równym 7 i pierwszym wyrazie równym $a_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Wobec tego $a_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 7^{n-1}$ dla dowolnego $n \geqslant 1$, co po uwzględnieniu zależności (10) prowadzi do wzorów

$$a_n = \tfrac{1}{2}(7^{n-1} + 1) \quad \text{oraz} \quad b_n = 7^{n-1} \qquad \text{dla każdego } n \geqslant 1.$$

W szczególności poszukiwana suma sześcianów wynosi

$$S_n(1,1) = a_n \cdot (1^3 + 1^3) + b_n \cdot (1+1)^3 = \tfrac{1}{2}(7^{n-1} + 1) \cdot 2 + 7^{n-1} \cdot 8 = \mathbf{9 \cdot 7^{n-1} + 1}.$$

Zawody stopnia drugiego

Zadanie **1**. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych a, b, c, d układ równań

$$\begin{cases} a^3 + b = c, \\ b^3 + c = d, \\ c^3 + d = a, \\ d^3 + a = b. \end{cases}$$

Rozwiązanie
Sposób **I**

Odejmijmy stronami trzecie równanie danego układu od pierwszego równania. Otrzymujemy

$$a^3 + b - c^3 - d = c - a,$$

czyli

$$b - d = c^3 - a^3 + c - a.$$

Zauważmy teraz, że liczby $c^3 - a^3$ i $c - a$ mają jednakowy znak: dla $c > a$ obie te liczby są dodatnie, dla $c < a$ obie są ujemne, a dla $c = a$ obie są równe zeru. Zatem także liczby $b - d$ i $c - a$ mają jednakowy znak.

Odejmując zaś stronami czwarte równanie układu od drugiego dostajemy

$$c - a = d^3 - b^3 + d - b,$$

skąd analogicznie wnioskujemy, że liczby $c-a$ i $d-b$ mają jednakowy znak. To wraz z równością znaków liczb $c - a$ i $b - d$ dowodzi, że $c - a = d - b = 0$, a więc $a = c$ oraz $b = d$. Wobec tego dany w treści zadania układ sprowadza się do następującego układu dwóch równań:

$$a^3 + b = a \qquad \text{oraz} \qquad b^3 + a = b.$$

Dodając stronami powyższe dwa równania widzimy, że $a^3 + b^3 = 0$. Stąd $a = -b$.

Wykazaliśmy w ten sposób, że $(a, b, c, d) = (t, -t, t, -t)$ dla pewnej liczby rzeczywistej t. Ponadto wszystkie równania rozważanego układu przyjmują postać $t^3 - t = t$, czyli $0 = t^3 - 2t = t(t^2 - 2)$. W efekcie warunki zadania są spełnione dla następujących trzech wartości parametru t: 0, $\sqrt{2}$ oraz $-\sqrt{2}$.

Sposób **II**

Przypuśćmy, że liczby a i b są nieujemne. Wówczas z pierwszego równania danego układu wynika, że $c \geqslant 0$, a następnie z drugiego równania — że $d \geqslant 0$. Dodając stronami wszystkie równania układu i redukując wyraz podobny $a+b+c+d$ uzyskujemy zależność $a^3+b^3+c^3+d^3=0$, w której wszystkie składniki lewej strony są nieujemne. Wobec tego $a=b=c=d=0$.

Analogicznie uzasadniamy, że wszystkie cztery niewiadome muszą być równe zeru także wtedy, gdy liczby a i b są niedodatnie.

W dalszej części rozwiązania przyjmujemy, że liczby a i b mają przeciwne znaki: jedna z nich jest dodatnia, a druga — ujemna. Podobnie dowodzimy, że liczby b i c mają przeciwne znaki oraz liczby c i d mają przeciwne znaki. Zatem wszystkie z liczb $x=a$, $y=-b$, $z=c$, $t=-d$ są dodatnie albo wszystkie są ujemne. Ponadto dany układ równań przybiera równoważną postać

$$\begin{cases} x^3=y+z, \\ y^3=z+t, \\ z^3=t+x, \\ t^3=x+y. \end{cases}$$

Oznaczmy przez M i m odpowiednio największą i najmniejszą wartość występującą wśród liczb x, y, z, t. Rozpatrzmy to równanie powyższego układu, w którym niewiadoma stojąca po lewej stronie jest równa M. Prawa strona tego równania jest sumą dwóch składników nie przekraczających M; wynika stąd związek $M^3 \leqslant 2M$, czyli $M \leqslant -\sqrt{2}$ lub $0 < M \leqslant \sqrt{2}$. Analogicznie z równania, w którym niewiadoma po lewej stronie ma wartość m, dostajemy alternatywę $-\sqrt{2} \leqslant m < 0$ lub $m \geqslant \sqrt{2}$. Jednak liczby M i m mają ten sam znak oraz $M \geqslant m$. Łącząc uzyskane nierówności stwierdzamy, że liczby M i m — a więc także liczby x, y, z, t — są wszystkie równe $\sqrt{2}$ lub wszystkie równe $-\sqrt{2}$. To daje dwie czwórki (a,b,c,d): $(\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{2})$ i $(-\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

Na koniec bezpośrednio sprawdzamy, że każda z trzech znalezionych czwórek liczb (a,b,c,d) istotnie spełnia dany w treści zadania układ równań. *Odpowiedź:* Wszystkimi rozwiązaniami (a,b,c,d) danego układu są:

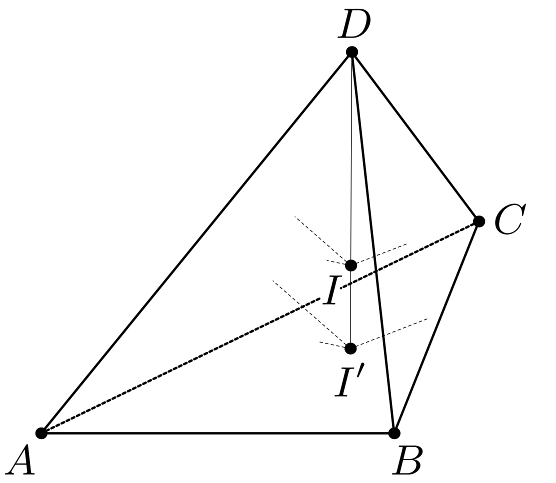
$$(0,0,0,0), \quad (\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{2}), \quad (-\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

Zadanie **2**. Udowodnić, że w czworościanie $ABCD$ wierzchołek D, środek sfery wpisanej oraz środek ciężkości czworościanu leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy pola trójkątów ABD, BCD i CAD są równe.

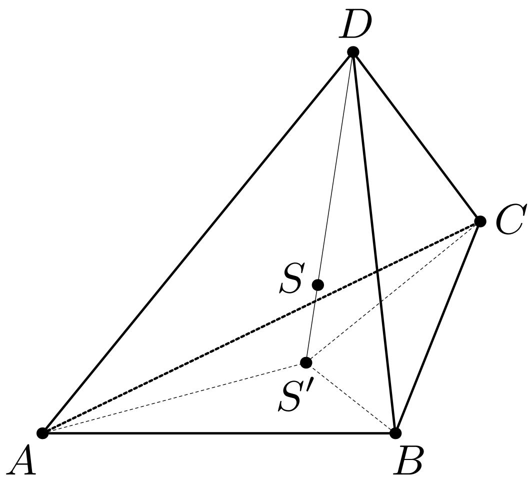
Rozwiązanie

Sposób **I**

Oznaczmy przez I oraz S odpowiednio środek sfery wpisanej w dany czworościan oraz jego środek ciężkości. Niech ponadto proste DI i DS przecinają ścianę ABC odpowiednio w punktach I' i S' (rys. 13 i 14). Wówczas punkty D, I oraz S leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy $I' = S'$.



Rysunek 13



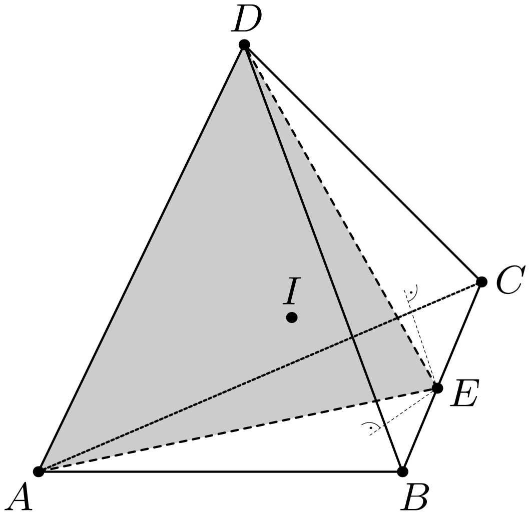
Rysunek 14

Punkt I — a więc także punkt I' — jest jednakowo odległy od ścian ABD, BCD i CAD. Co więcej, I' jest jedynym takim punktem trójkąta ABC. To oznacza, że punkty D, I oraz S leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy punkt S' jest jednakowo odległy od rozważanych trzech ścian.

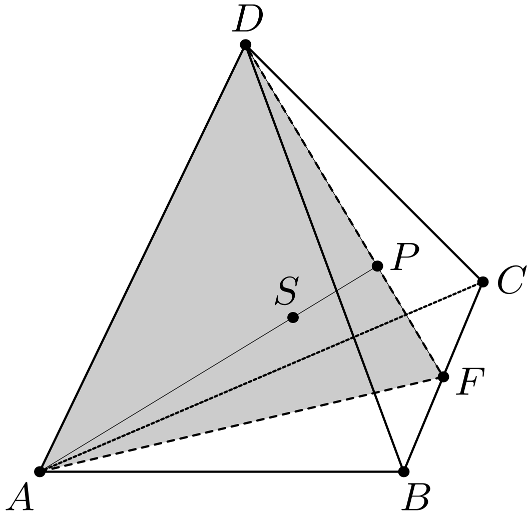
Z drugiej strony, punkt S' jest środkiem ciężkości ściany ABC, zatem pola trójkątów ABS', BCS' i CAS' są równe. Wobec tego objętości czworościanów $ABS'D$, $BCS'D$ i $CAS'D$, mających wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka D, są równe. W takim razie iloczyn pola dowolnego spośród trójkątów ABD, BCD, CAD i odległości punktu S' od płaszczyzny tego trójkąta jest taki sam dla wszystkich trzech trójkątów. To zaś prowadzi do wniosku, że trójkąty te mają jednakowe pola wtedy i tylko wtedy, gdy odległości punktu S' od tych ścian są równe, skąd uzyskujemy tezę.

Sposób **II**

Niech I oraz S oznaczają odpowiednio środek sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ oraz jego środek ciężkości. Niech ponadto płaszczyzny ADI i ADS przecinają krawędź BC odpowiednio w punktach E i F (rys. 15 i 16).



Rysunek 15



Rysunek 16

Punkt S leży na płaszczyźnie ADI wtedy i tylko wtedy, gdy $E = F$.

Ponieważ S jest środkiem ciężkości danego czworościanu, więc prosta AS przecina ścianę BCD w punkcie P będącym jej środkiem ciężkości, a punkt F, w którym prosta DP przecina krawędź BC, jest środkiem tejże krawędzi.

Dowolny punkt płaszczyzny ADI — w szczególności punkt E — jest jednakowo odległy od płaszczyzn ABD i CAD. Zatem czworościany $ABDE$ i $CADE$ mają równe objętości wtedy i tylko wtedy, gdy ich podstawy ABD i CAD mają równe pola. Rozpatrując z kolei wspólną podstawę ADE tych czworościanów stwierdzamy, że stosunek ich objętości wynosi $BE : EC$. Wobec tego warunek $E = F$ jest równoważny równości pól ścian ABD i CAD.

W efekcie punkt S leży na płaszczyźnie ADI wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąty ABD i CAD mają równe pola. Podobnie leży on na płaszczyźnie BDI wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąty ABD i BCD mają równe pola. Jednak częścią wspólną tych dwóch płaszczyzn jest prosta DI. Wynika stąd teza.

Zadanie **3**. Niech m, n będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że w zbiorze $\{1,2,\ldots,n\}$ znajduje się dokładnie m liczb pierwszych. Dowieść, że wśród dowolnych $m+1$ różnych liczb z tego zbioru można znaleźć liczbę, która jest dzielnikiem iloczynu pozostałych m liczb.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że teza zadania jest nieprawdziwa. Istnieje wtedy taki $(m+1)$-elementowy zbiór A zawarty w zbiorze $\{1,2,\ldots,n\}$, że żadna liczba $x \in A$ nie jest dzielnikiem iloczynu pozostałych m elementów zbioru A. Każda liczba $x \in A$ ma więc dzielnik pierwszy p, który wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze liczby x z wykładnikiem wyższym niż do rozkładu na czynniki pierwsze iloczynu pozostałych m liczb ze zbioru A.

Dla ustalonego elementu $x \in A$ liczba pierwsza p o własności opisanej w poprzednim zdaniu nie musi być jedyna — jeżeli jest ich więcej, wybieramy dowolną z nich. W ten sposób każdemu elementowi $x \in A$ przypisaliśmy liczbę pierwszą ze zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$. Jednak zbiór A składa się z $m+1$ elementów, a do dyspozycji mamy tylko m liczb pierwszych. W rezultacie pewna liczba pierwsza p została przyporządkowana dwóm różnym elementom $x, y \in A$.

Niech w oznacza iloczyn $m-1$ elementów zbioru A różnych od x i y. Na mocy określenia liczby p istnieją takie nieujemne całkowite wykładniki k i ℓ, że potęga p^k jest dzielnikiem liczby x, ale nie iloczynu wy, a potęga p^ℓ jest dzielnikiem liczby y, ale nie iloczynu wx. Zatem w rozkładzie iloczynu $wy \cdot wx$ liczba pierwsza p występuje z wykładnikiem niższym niż $k+\ell$, mimo że iloczyn ten jest podzielny przez liczbę xy, która z kolei jest podzielna przez $p^{k+\ell}$.

Uzyskana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie **4**. Znaleźć wszystkie takie pary funkcji f, g określonych na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujących wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniona jest równość

$$g(f(x)-y)=f(g(y))+x. \tag{1}$$

Rozwiązanie

Sposób **I**

Oznaczmy $a=f(g(0))$. Podstawiając $y=0$ w warunku (1) otrzymujemy

$$g(f(x))=f(g(0))+x=a+x. \tag{2}$$

Oznaczając zaś $y=f(x)$ w zależności (1) i wykorzystując związek (2) dostajemy

$$g(0)=f(g(f(x)))+x=f(a+x)+x \tag{3}$$

dla każdego x. Niech teraz z będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Przyjmując $x=z-a$ w równości (3) stwierdzamy, że

$$f(z)=f(a+x)=g(0)-x=g(0)-z+a=c-z \qquad \text{dla dowolnego } z, \tag{4}$$

gdzie oznaczyliśmy $c=g(0)+a$. Wobec tego związek (2) przybiera postać

$$g(c-x)=a+x. \tag{5}$$

Podstawiając $x=c-t$ w zależności (5) uzyskujemy

$$g(t)=g(c-(c-t))=a+(c-t) \qquad \text{dla dowolnego } t. \tag{6}$$

Na mocy równości (6) zastosowanej dla $t=0$ oraz równości (4) otrzymujemy $a=f(g(0))=f(a+c)=c-(a+c)=-a$, czyli $a=0$. Zależności (4) i (6) prowadzą teraz do wniosku:

$$f(x)=g(x)=c-x \qquad \text{dla każdego } x. \tag{7}$$

Nietrudno sprawdzić, że dla dowolnej wartości c funkcje f i g zadane wzorami (7) spełniają równość (1) — obie jej strony są wówczas równe $x+y$.

Sposób **II**

Podstawiając $y=0$ w warunku (1) dostajemy

$$g(f(x))=f(g(0))+x. \tag{8}$$

Gdy x przebiega zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, przebiega go również prawa strona równości (8). Zatem każda liczba rzeczywista jest przyjmowana jako wartość funkcji g. Stosując zaś zależność (1) dla $x=0$ otrzymujemy

$$g(f(0)-y)=f(g(y)). \tag{9}$$

Wyrażenie $f(0) - y$ może przyjąć dowolną wartość rzeczywistą. Stąd, na mocy już uczynionego spostrzeżenia, lewa strona związku (9) może przyjąć dowolną wartość rzeczywistą. Każda liczba rzeczywista jest więc wartością funkcji f.

Niech teraz t będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Wówczas istnieją liczby rzeczywiste u i w, dla których

$$g(u) = t \qquad \text{oraz} \qquad f(w) = u.$$

Przyjmując $x = w$ i $y = 0$ w równości (1) stwierdzamy, że

$$t = g(u) = g(f(w)) = f(g(0)) + w, \tag{10}$$

a podstawiając $x = w$ i $y = u$ uzyskujemy

$$g(0) = g(f(w) - u) = f(g(u)) + w = f(t) + w. \tag{11}$$

Łącząc zależności (10) i (11) dochodzimy do związku

$$f(t) = c - t \qquad \text{dla każdego } t, \tag{12}$$

gdzie oznaczyliśmy $c = f(g(0)) + g(0)$. W konsekwencji dla dowolnej liczby rzeczywistej s podstawiając $x = c - s$ i $y = 0$ w warunku (1) dostajemy

$$g(s) = g(f(c - s)) = f(g(0)) + c - s \qquad \text{dla każdego } s. \tag{13}$$

Korzystając z równości (13) dla $s = 0$ i z określenia liczby c otrzymujemy równość $g(0) = f(g(0)) + c = 2f(g(0)) + g(0)$; wobec tego $f(g(0)) = 0$. Związki (12) i (13) pociągają teraz za sobą wzory (7).

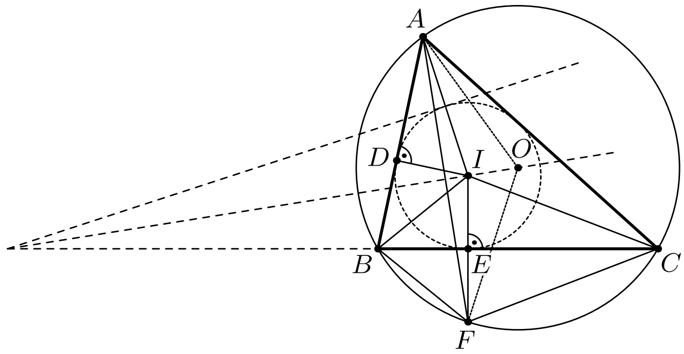
Na koniec sprawdzamy, że takie pary funkcji spełniają warunki zadania.

Odpowiedź: Wszystkie pary funkcji f, g o żądanej własności są opisane zależnością $f(x) = g(x) = c - x$, gdzie c jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Zadanie **5**. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle CAB = 60^\circ$ oraz $AB \neq AC$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, a punkt I — środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wykazać, że symetralna odcinka AI, prosta OI i prosta BC przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Sposób **I**



Rysunek 17

Korzystając z zależności $\sphericalangle CAB = 60^\circ$ stwierdzamy (rys. 17), że

(1) $$\sphericalangle BIC = 180^\circ - \tfrac{1}{2}(\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA) = 180^\circ - \tfrac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle CAB) = 120^\circ.$$

Oznaczmy przez D i E rzuty prostokątne punktu I odpowiednio na boki AB i BC. Niech ponadto F będzie punktem symetrycznym do punktu I względem prostej BC. Punkty F i A leżą po przeciwnych stronach prostej BC, a przy tym na podstawie związku (1) otrzymujemy

$$\sphericalangle BFC + \sphericalangle CAB = \sphericalangle BIC + \sphericalangle CAB = 180^\circ.$$

Wobec tego punkt F leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC, skąd

(2) $$OA = OF.$$

Z drugiej strony, w trójkącie prostokątnym ADI miara kąta ostrego równa jest $\sphericalangle IAD = \frac{1}{2}\sphericalangle CAB = 30^\circ$ i w takim razie

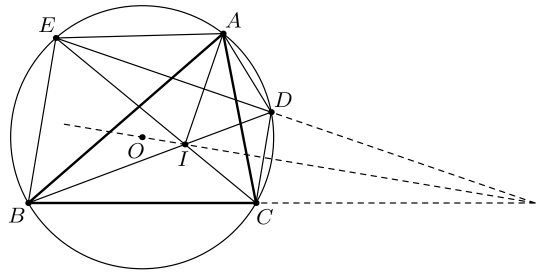
(3) $$IA = 2ID = 2IE = IF.$$

Równości (2) i (3) dowodzą, że punkty O oraz I leżą na symetralnej odcinka AF. Zatem symetralna odcinka AI, prosta OI oraz prosta BC są symetralnymi boków trójkąta IAF, a więc przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

Sposób **II**

Oznaczmy przez D i E punkty, w których odpowiednio proste BI i CI przecinają ponownie okrąg opisany na trójkącie ABC (rys. 18). Wówczas

$\sphericalangle EIB = 180^\circ - \sphericalangle BIC = \frac{1}{2}(\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA) =$
$= \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle CAB) = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle CEB) = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle IEB),$



Rysunek 18

czyli trójkąt BEI jest równoramienny: $EB = EI$. Podobnie uzasadniamy, że

$$EA = EI, \quad DC = DI \quad \text{oraz} \quad DA = DI.$$

Z zależności $\sphericalangle CDB = \sphericalangle CEB = \sphericalangle CAB = 60^\circ$ wynika teraz, że trójkąty CDI i BEI są równoboczne. Zatem czworokąt $EBCD$ jest trapezem równoramiennym o podstawach EB i CD oraz — w myśl założenia $AB \neq AC$ — nierównoległych ramionach. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trapezie, a jego przekątne przecinają się w punkcie I. Stąd wniosek, że prosta OI jest osią symetrii rozważanego trapezu.

Związki $EA = EI$ i $DA = AI$ dowodzą zaś, że prosta ED jest symetralną odcinka AI. Wobec tego trzy proste występujące w tezie zadania to proste zawierające ramiona trapezu równoramiennego $EBCD$ oraz jego oś symetrii, a więc mają one punkt wspólny — punkt przecięcia prostych BC i ED.

Zadanie **6**. Niech $S(k)$ oznacza sumę cyfr liczby całkowitej k w zapisie dziesiętnym. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych n, że $S(2^n + n) < S(2^n)$.

Rozwiązanie

Przedstawimy dwa sposoby rozwiązania. Najpierw jednak udowodnimy następujący fakt, z którego skorzystamy w obu sposobach:

Dla dowolnych nieujemnych liczb całkowitych x, k zachodzi nierówność

$$S(x + 10^k) \leqslant S(x) + 1. \tag{1}$$

Rzeczywiście, przy pisemnym dodawaniu $x + 10^k$ dodajemy jedynkę do pewnej pozycji w zapisie dziesiętnym liczby x. Jeżeli stoi tam cyfra różna od 9, to zwiększamy ją o 1 i nie zmieniamy żadnej z pozostałych cyfr liczby x i wobec tego $S(x + 10^k) = S(x) + 1$. Jeżeli natomiast stoi tam cyfra 9, to w zapisie liczby x zamieniamy pewien blok kolejnych cyfr równych 9 na blok zer i zwiększamy cyfrę stojącą przed tym blokiem o 1. W efekcie $S(x+10^k) = S(x)-9d+1$, gdzie d oznacza liczbę zamienionych dziewiątek, a więc $S(x + 10^k) < S(x)$.

Zauważmy ponadto, że na mocy algorytmu pisemnego mnożenia iloczyn liczb całkowitych ma taką samą cyfrę jedności jak iloczyn ich cyfr jedności.

Sposób **I**

Wykażemy, że dla każdej liczby całkowitej $m \geqslant 2$ liczba $n = 10^m + 3$ ma wymaganą własność.

Iloczyn liczb kończących się w zapisie dziesiętnym cyfrą 6 również ma cyfrę jedności 6. Wobec tego cyfrą jedności liczby $2^{10^m} = 16^{25\cdot 10^{m-2}}$ jest 6. Podobnie liczba $2^n = 2^{10^m} \cdot 8$ ma cyfrę jedności taką samą jak liczba $6 \cdot 8 = 48$, czyli cyfrę 8. Zatem $2^n = 10a + 8$ dla pewnej liczby całkowitej a. Stosujemy nierówność (1) dwa razy:

$$S(2^n + n) = S(10a + 8 + 10^m + 3) = S(10a + 1 + 10 + 10^m) \leqslant$$
$$\leqslant S(10a + 1 + 10) + 1 \leqslant S(10a + 1) + 2.$$

Liczby $10a+1$ i $10a+8$ mają jednakowe zapisy dziesiętne z wyjątkiem cyfr jedności, równych odpowiednio 1 i 8. To oznacza, że $S(10a + 1) = S(10a + 8) - 7$, zatem

$$S(2^n + n) \leqslant S(10a + 1) + 2 = S(10a + 8) - 7 + 2 = S(2^n) - 5 < S(2^n).$$

Sposób **II**

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie udowodnimy, że dla dowolnej liczby całkowitej $m \geqslant 2$ liczba $n = 10^m - 2$ spełnia warunki zadania.

Ponieważ iloczyn liczb o cyfrze jedności 6 także ma cyfrę jedności 6, więc liczba $2^{10^m-4} = 16^{25\cdot 10^{m-2}-1}$ ma cyfrę jedności 6. Liczba $2^n = 2^{10^m-4}\cdot 4$ ma zaś cyfrę jedności taką jak liczba $6 \cdot 4 = 24$, czyli cyfrę 4. W rezultacie $2^n = 10b + 4$ dla pewnej liczby całkowitej b, skąd na mocy nierówności (1) dostajemy

$$\begin{aligned} S(2^n + n) &= S(10b + 4 + 10^m - 2) = S(10b + 2 + 10^m) \leqslant \\ &\leqslant S(10b + 2) + 1 = S(10b + 4) - 2 + 1 = S(2^n) - 1 < S(2^n). \end{aligned}$$

Zawody stopnia trzeciego

Zadanie **1**. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka dodatnia liczba wymierna w, nie będąca liczbą całkowitą, że potęga w^w jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że liczba wymierna w spełnia dany warunek i zapiszmy ją w postaci ułamka nieskracalnego $w = \frac{a}{b}$, gdzie a i b są względnie pierwszymi dodatnimi liczbami całkowitymi. Liczba w nie jest całkowita, zatem $b > 1$. Przedstawmy wreszcie liczbę wymierną w^w jako ułamek $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są względnie pierwszymi dodatnimi liczbami całkowitymi. Wówczas

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Podnosząc równość (1) stronami do potęgi b, a następnie mnożąc ją obustronnie przez $b^a n^b$, otrzymujemy

$$a^a n^b = m^b b^a. \tag{2}$$

Zależność (2) wskazuje, że liczba n^b jest dzielnikiem iloczynu $m^b b^a$. Ponieważ liczby m i n są względnie pierwsze, więc liczba n^b musi być dzielnikiem liczby b^a. Ponadto — znów na mocy związku (2) — liczba b^a jest dzielnikiem iloczynu $a^a n^b$. Korzystając teraz z faktu, że liczby a i b są względnie pierwsze, dochodzimy do wniosku, że liczba b^a jest dzielnikiem liczby n^b. Wobec tego

$$n^b = b^a. \tag{3}$$

Rozważmy rozkład liczby b na czynniki pierwsze. W myśl równości (3) wykładnik, z jakim dowolna liczba pierwsza wchodzi do tego rozkładu, staje się po pomnożeniu przez a liczbą podzielną przez b. Jednak liczby a i b są względnie pierwsze i w efekcie wykładnik ten musiał być podzielny przez b. Zatem nie tylko liczba b^a, lecz także liczba b jest b-tą potęgą liczby całkowitej.

Niech więc $b = c^b$, gdzie c jest dodatnią liczbą całkowitą. Zależność $b > 1$ dowodzi, że $c > 1$, czyli $c \geqslant 2$. Stąd $b = c^b \geqslant 2^b$. Uzyskaliśmy sprzeczność, gdyż dla każdej liczby całkowitej $k \geqslant 2$ prawdziwa jest przeciwna nierówność $k < 2^k$. Aby ją uzasadnić stosujemy indukcję. Dla $k = 2$ nierówność jest prawdziwa. Natomiast krok indukcyjny sprowadza się do spostrzeżenia, że jeżeli $k < 2^k$ dla pewnej wartości $k \geqslant 2$, to

$$k + 1 < 2^k + 1 < 2^k + 2^k = 2^{k+1}.$$

To kończy rozwiązanie zadania.

Odpowiedź: Taka liczba w nie istnieje.

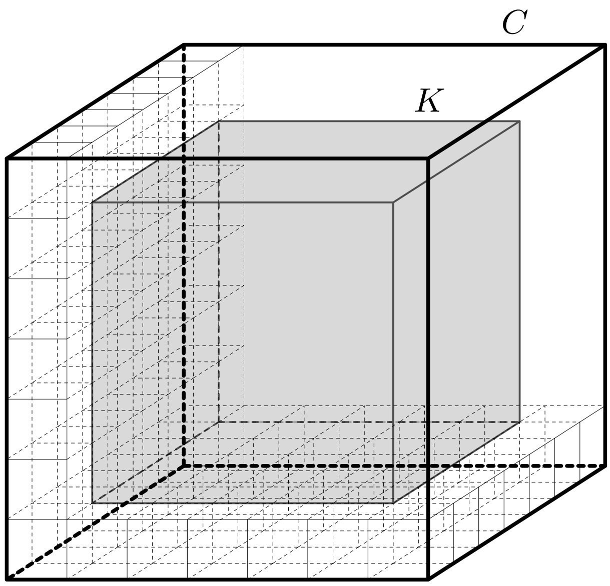
Zadanie **2**. Wyznaczyć wszystkie pary (m,n) dodatnich liczb całkowitych, dla których sześcian K o krawędzi n można obudować prostopadłościennymi klockami o wymiarach $m \times 1 \times 1$ w taki sposób, by powstał sześcian o krawędzi $n+2$, mający ten sam środek co K.

Rozwiązanie

Zaprezentujemy dwa różne sposoby rozwiązania. Wprowadzimy najpierw pojęcia i oznaczenia wspólne dla obu sposobów.

Niech C będzie sześcianem o krawędzi $n+2$, podzielonym na sześciany jednostkowe zwane w dalszej części *kostkami*, i umieszczonym w trójwymiarowym układzie współrzędnych jako zbiór punktów o wszystkich współrzędnych należących do przedziału $\langle -\frac{1}{2}, n+\frac{3}{2} \rangle$. Wówczas wszystkie współrzędne środka dowolnej kostki należą do zbioru $\{0,1,2,\ldots,n+1\}$.

Kostki nie przylegające do brzegu sześcianu C tworzą sześcian o krawędzi n współśrodkowy z C. Jest to sześcian K, o którym mowa w treści zadania (rys. 19). Należy wyznaczyć takie pary (m,n), że wszystkie kostki brzegowe można połączyć w *klocki* zbudowane z m kostek, będące prostopadłościanami o wymiarach $m \times 1 \times 1$.



Rysunek 19

Sposób **I**

Przypuśćmy, że istnieje ciąg $n+2$ liczb rzeczywistych a_0, a_1, …, a_n, a_{n+1} o następujących dwóch własnościach:

1. Suma dowolnych m kolejnych wyrazów jest równa zeru.

2. $a_0 + a_{n+1} \neq 0$.

Udowodnimy, że wtedy para (m,n) nie spełnia warunków zadania.

W tym celu wpiszmy w każdą z $(n+2)^3$ kostek liczbę rzeczywistą zgodnie z następującą zasadą: w kostkę o środku (x,y,z) wpisujemy iloczyn $a_x a_y a_z$.

Dla każdego klocka suma m liczb wpisanych w jego kostki jest równa zeru. Istotnie, ciąg współrzędnych środków tych kostek ma jedną z następujących postaci: $(p+i,q,r)$ dla $i=0,1,\ldots,m-1$, $(p,q+i,r)$ dla $i=0,1,\ldots,m-1$, albo też $(p,q,r+i)$ dla $i=0,1,\ldots,m-1$. Rozważana suma m liczb wynosi więc odpowiednio $(a_p+a_{p+1}+\ldots+a_{p+m-1})a_q a_r$, $a_p(a_q+a_{q+1}+\ldots+a_{q+m-1})a_r$, albo też $a_p a_q(a_r+a_{r+1}+\ldots+a_{r+m-1})$, i na mocy warunku **1** we wszystkich trzech uzyskanych iloczynach czynnik stojący w nawiasie jest równy zeru.

Wobec tego jeżeli sześcian C można otrzymać z sześcianu K w wyniku obudowania go klockami, to sumy S i S' wszystkich liczb wpisanych w kostki odpowiednio sześcianów K i C są równe.

Jednak suma n^3 liczb wpisanych w kostki sześcianu K to suma n^3 iloczynów $a_x a_y a_z$ dla $x,y,z\in\{1,2,\ldots,n-1,n\}$, skąd $S=(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n)^3$. Analogicznie stwierdzamy, że $S'=(a_0+a_1+\ldots+a_n+a_{n+1})^3$. Zatem w myśl warunku **2** sumy S i S' są różne, co dowodzi zapowiedzianej tezy.

Zbadamy teraz, dla jakich par (m,n) istnieje ciąg a_0, a_1, $\ldots$, a_n, a_{n+1} o opisanych własnościach. Jeżeli $m=2$ oraz n jest liczbą nieparzystą, to przykładem takiego ciągu jest $(a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,a_{n+1})=(1,-1,1,-1,\ldots,-1,1)$. Wykażemy, że żądany ciąg istnieje także dla każdej liczby $m\geqslant 3$ i dowolnej wartości n. Niech r oznacza resztę z dzielenia liczby $n+1$ przez m. Wybierzmy dowolny element $s\in\{0,1,2,\ldots,m-1\}$ różny od 0 i r oraz określmy

$$a_i=\begin{cases} 1, & \text{gdy liczba } i \text{ jest podzielna przez } m,\\ -1, & \text{gdy liczba } i \text{ daje resztę } s \text{ z dzielenia przez } m,\\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach}\end{cases}$$

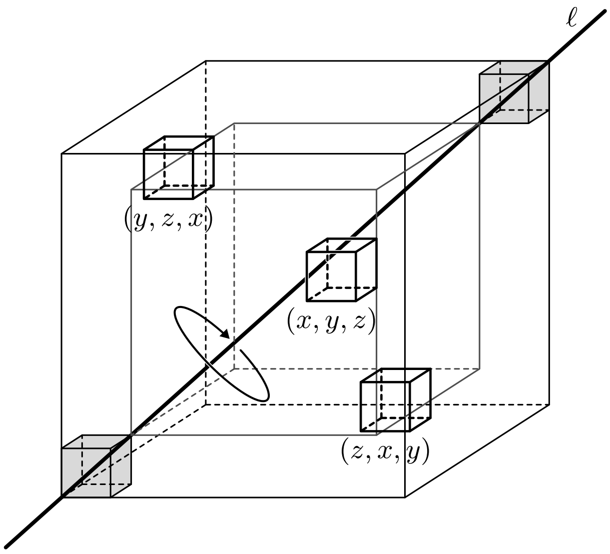
dla $i=0,1,\ldots,n,n+1$. Wówczas wśród dowolnych m kolejnych wyrazów ciągu a_0, a_1, $\ldots$, a_n, a_{n+1} znajduje się jeden wyraz równy 1 i jeden wyraz równy -1, a pozostałe wyrazy są równe zeru, skąd wynika własność **1**. Suma a_0+a_{n+1} wynosi zaś: 1 dla $r\neq 0$ oraz 2 dla $r=0$, co pociąga za sobą własność **2**.

Aby zakończyć rozwiązanie sprawdzimy, że pary (m,n), w których $m=1$ lub w których $m=2$ i n jest liczbą parzystą, spełniają warunki zadania. Dla $m=1$ nie ma czego dowodzić. Z kolei dla $m=2$ bryła wypełniona przez kostki brzegowe składa się ze ściany dolnej i górnej, które są prostopadłościanami $(n+2)\times(n+2)\times 1$, oraz z pionowych słupów o wymiarach $1\times 1\times n$. Wtedy dla parzystych wartości n obie ściany i każdy słup możemy rozbić na prostopadłościenne klocki $2\times 1\times 1$.

Sposób **II**

Wpiszmy w każdą kostkę brzegową liczbę ze zbioru $S=\{0,1,2,\ldots,m-1\}$ w następujący sposób: jeżeli środek kostki ma współrzędne (x,y,z), to wpisujemy w nią resztę z dzielenia sumy $x+y+z$ przez m. Wówczas w dowolnym klocku sumy współrzędnych środków jego kostek tworzą ciąg m kolejnych liczb całkowitych, czyli każdy element zbioru S pojawia się dokładnie raz. Jeśli więc para (m,n) ma własność opisaną w treści zadania, to wśród wszystkich kostek brzegowych każdy element zbioru S występuje tyle samo razy.

Zbiór punktów o równych trzech współrzędnych tworzy prostą ℓ przechodzącą przez dwa przeciwległe wierzchołki sześcianu C. Obrót o kąt 120° wokół prostej ℓ przeprowadza: sześcian C na siebie, kostki brzegowe na kostki brzegowe, a punkt (x,y,z) — na punkt (y,z,x) o takiej samej sumie współrzędnych (rys. 20). Ponadto jedynie kostka o środku $(0,0,0)$ i kostka o środku $(n+1,n+1,n+1)$ przechodzą na siebie; nazwijmy je kostkami *wyjątkowymi*. Pozostałe kostki brzegowe pod wpływem obrotu łączą się w trójki o środkach postaci (x,y,z), (y,z,x) i (z,x,y). Liczby wpisane we wszystkie kostki takiej trójki są równe. Wynika stąd, że wśród kostek brzegowych niewyjątkowych liczba wystąpień każdego elementu zbioru S jest podzielna przez 3. Jeżeli pewien element zbioru S nie jest wpisany w żadną z dwóch



Rysunek 20

kostek wyjątkowych, to liczba jego wystąpień wśród wszystkich kostek brzegowych jest podzielna przez 3. Z kolei dla elementu $s \in S$ wpisanego w kostkę wyjątkową — zależnie od tego, czy w drugiej kostce wyjątkowej także znajduje się s — liczba wystąpień daje resztę 1 lub 2 z dzielenia przez 3. Aby więc wszystkie elementy zbioru S mogły pojawić się tyle samo razy, każda liczba wpisana w dowolną kostkę musi również wystąpić w pewnej kostce wyjątkowej.

W rezultacie albo $m = 1$, albo też $m = 2$ i dwie kostki wyjątkowe zawierają dwie różne liczby. W drugim przypadku sumy współrzędnych środków tych kostek, równe 0 i $3n+3$, mają różną parzystość, czyli n jest liczbą parzystą.

Na koniec tak jak w sposobie I sprawdzamy, że dla $m = 1$ oraz dla $m = 2$ i parzystych wartości n istnieje poszukiwane obudowanie sześcianu K.

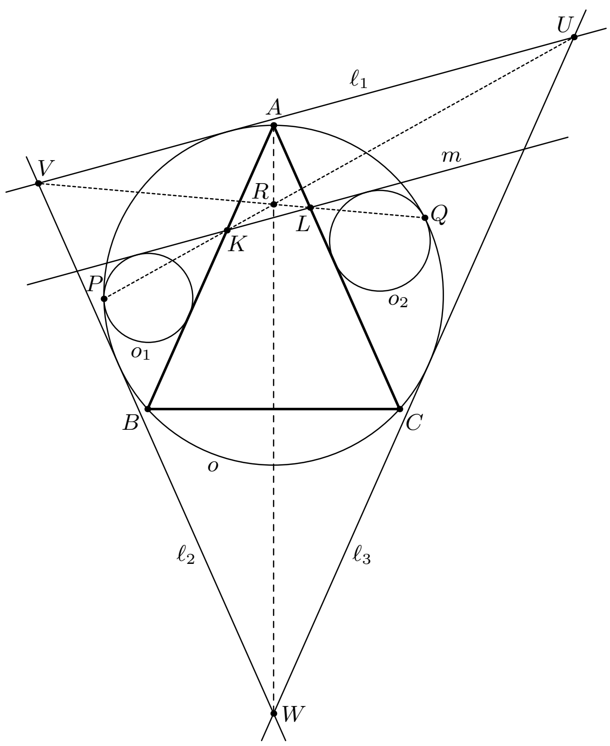
Odpowiedź: Para (m,n) ma żądaną własność wtedy i tylko wtedy, gdy $m = 1$ lub gdy $m = 2$ i n jest liczbą parzystą.

Zadanie **3**. Trójkąt ABC, w którym $AB = AC$, jest wpisany w okrąg o. Okręgi o_1 i o_2 są styczne wewnętrznie do okręgu o odpowiednio w punktach P i Q, są też styczne odpowiednio do odcinków AB i AC oraz są rozłączne z wnętrzem trójkąta ABC. Niech m będzie taką prostą styczną do okręgów o_1 i o_2, że punkty P i Q leżą po przeciwnej jej stronie niż punkt A. Prosta m przecina odcinki AB i AC odpowiednio w punktach K i L. Dowieść, że punkt przecięcia prostych PK i QL leży na dwusiecznej kąta BAC.

Rozwiązanie

Sposób **I**

Poprowadźmy trzy proste styczne do okręgu o: prostą ℓ_1 równoległą do prostej m i leżącą po przeciwnej jej stronie niż punkty B i C, prostą ℓ_2 równoległą do prostej AC i leżącą po tej samej jej stronie co punkt B, oraz prostą ℓ_3 równoległą do prostej AB i leżącą po tej samej jej stronie co punkt C. Oznaczmy ponadto symbolami U, V i W wierzchołki trójkąta wyznaczonego przez proste ℓ_1, ℓ_2 i ℓ_3 w sposób wskazany na rys. 21. Jednokładność o środku P, która odwzorowuje okrąg o_1 na



Rysunek 21

okrąg o, przekształca proste m i AB styczne do okręgu o_1 na proste ℓ_1 i ℓ_3 styczne do okręgu o. Zatem przeprowadza ona punkt K przecięcia prostych m i AB na punkt U przecięcia prostych ℓ_1 i ℓ_3. Stąd wniosek, że punkty P, K i U leżą na jednej prostej. Analogicznie punkty Q, L i V leżą na jednej prostej.

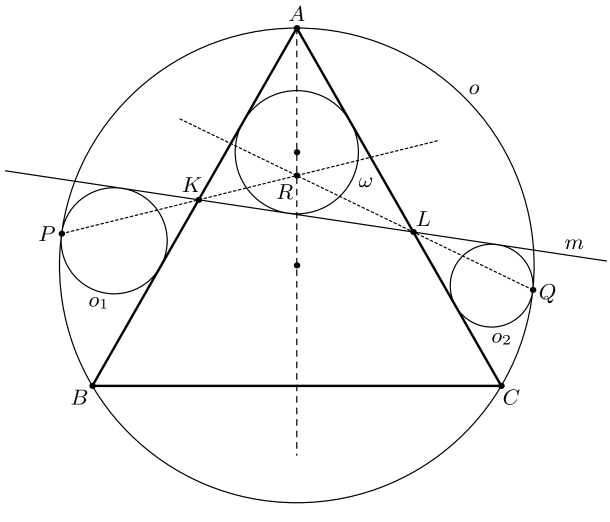
Niech R będzie punktem przecięcia prostych PK i QL. Rozpatrzmy jednokładność j o środku R przekształcającą prostą m na prostą ℓ_1; zachowuje ona proste

KU i LV, czyli przeprowadza punkty K i L odpowiednio na punkty U i V. Wobec tego j odwzorowuje prostą AB, przechodzącą przez punkt K, na równoległą do niej prostą, przechodzącą przez punkt U, a więc na prostą ℓ_3. Podobnie uzasadniamy, że j przekształca prostą AC na prostą ℓ_2. To oznacza, że proste zawierające boki trójkąta AKL są odwzorowywane przez jednokładność j na proste zawierające boki trójkąta WUV. W efekcie oba te trójkąty są jednokładne względem punktu R, co dowodzi, że punkt R leży na prostej AW.

Do zakończenia pozostaje jeszcze wykazać, że punkt W leży na dwusiecznej kąta BAC. Jednak przy symetrii względem tej dwusiecznej prosta AB przechodzi na prostą AC, a z równości $AB = AC$ wynika, że okrąg o przechodzi na siebie. Zatem prosta ℓ_2 przechodzi przy tej symetrii na prostą ℓ_3, czyli punkt ich przecięcia W leży na osi tej symetrii, co kończy rozwiązanie.

Sposób **II**

Ponieważ okrąg o_1 jest styczny wewnętrznie do okręgu o w punkcie P, więc pewna jednokładność j_1 o środku P i skali dodatniej przeprowadza okrąg o na okrąg o_1. Rozpatrzmy z kolei okrąg o_1 oraz okrąg ω wpisany w trójkąt AKL (rys. 22). Wspólne styczne zewnętrzne do tych dwóch okręgów — proste m i AB — przecinają się w punkcie K. Wynika stąd, że pewna jednokładność j_2 o środku K i skali ujemnej odwzorowuje okrąg o_1 na okrąg ω. Na podstawie twierdzenia o złożeniu jednokładności (zob. *L Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego*, Warszawa 2000, Dodatek D, str. 115) złożenie $j_2 \circ j_1$ jest jednokładnością o skali ujemnej i środku leżącym na prostej PK, przekształcającą okrąg o na okrąg ω. Analogicznie uzasadniamy, że pewna jednokładność j_1' o środku Q i skali dodatniej



Rysunek 22

przeprowadza okrąg o na okrąg o_2, zaś pewna jednokładność j_2' o środku L i skali ujemnej odwzorowuje okrąg o_2 na okrąg ω. Ponadto złożenie $j_2' \circ j_1'$ jest jednokładnością o skali ujemnej i środku leżącym na prostej QL, przekształcającą okrąg o na okrąg ω.

W konsekwencji złożenia $j_2 \circ j_1$ oraz $j_2' \circ j_1'$ są jednokładnościami o skali ujemnej, przeprowadzającymi okrąg o na okrąg ω. Jednak dla dowolnej pary okręgów na płaszczyźnie istnieje tylko jedna jednokładność o skali ujemnej odwzorowująca pierwszy okrąg na drugi. Zatem rozważane złożenia są tą samą jednokładnością. Co więcej, jej środek R leży na prostej przechodzącej przez środki okręgów o i ω. W myśl równości $AB = AC$ oba te środki leżą na dwusiecznej kąta BAC. Stąd punkt R — który na mocy wcześniejszych części rozwiązania jest punktem przecięcia prostych PK i QL — także leży na owej dwusiecznej, a to właśnie należało udowodnić.

Zadanie **4**. W turnieju wzięło udział n zawodników ($n \geqslant 4$). Każdy zawodnik rozegrał dokładnie jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, nie było remisów. Zakładamy, że nie istnieje taka czwórka zawodników (A, B, C, D), że A wygrał z B, B wygrał z C, C wygrał z D oraz D wygrał z A. Wyznaczyć, w zależności od n, największą możliwą liczbę takich trójek zawodników (A, B, C), że A wygrał z B, B wygrał z C oraz C wygrał z A.

(*Uwaga:* Trójki (A, B, C), (B, C, A) i (C, A, B) uważamy za jedną trójkę.)

Rozwiązanie

Nazwijmy *trójką remisową* zbiór złożony z trzech zawodników, których można tak oznaczyć literami A, B, C, że A wygrał z B, B wygrał z C i C wygrał z A. Mamy więc znaleźć największą możliwą liczbę trójek remisowych.

Wykażemy, że jeden zawodnik nie może należeć do dwóch różnych trójek remisowych. Przypuśćmy, wbrew tej tezie, że dwie różne trójki mają wspólnych niektórych zawodników. Wtedy istnieje taki zawodnik A należący do obu tych trójek, który pokonał różne osoby z tych trójek. Oznaczmy tych, którzy przegrali z A, symbolami B i C. Przyjmijmy, że B wygrał z C. Niech D będzie trzecim zawodnikiem z tej trójki, w której są A i C; wtedy D przegrał z C i wygrał z A. Wobec tego A wygrał z B, B wygrał z C, C wygrał z D oraz D wygrał z A, co przeczy warunkom zadania.

Każdy zawodnik należy więc do co najwyżej jednej trójki remisowej. Wobec tego trzykrotność liczby tych trójek nie przekracza n. W efekcie trójek remisowych jest nie więcej niż m, gdzie m jest największą liczbą całkowitą, dla której $m \leqslant \frac{1}{3}n$.

Wskażemy teraz przykład turnieju o wymaganej własności, w którym liczba trójek remisowych wynosi co najmniej m.

W tym celu ponumerujmy zawodników liczbami 1, 2, 3, ..., n i określmy wyniki rozgrywek przyjmując, że każdy mecz został wygrany przez zawodnika o mniejszym numerze, z następującymi wyjątkami: dla $k = 1, 2, 3, \ldots, m$ zawodnik o numerze $3k-2$ przegrał z zawodnikiem o numerze $3k$. Wówczas dla $k = 1, 2, 3, \ldots, m$ zawodnicy o numerach $3k-2$, $3k-1$ i $3k$ tworzą trójkę remisową.

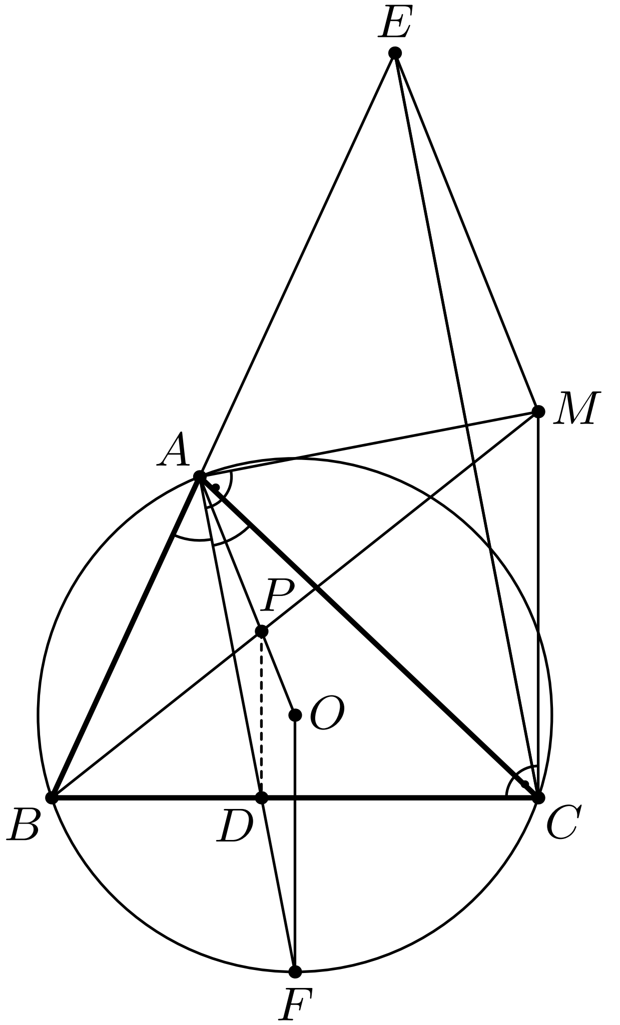
Przypuśćmy, że istnieje czwórka (A, B, C, D) opisana w treści zadania; przy czym zawodnik A ma w niej najmniejszy numer. Ponieważ A przegrał z zawodnikiem D o większym numerze, więc dla pewnego k zawodnicy A i D mają odpowiednio numery $3k-2$ i $3k$. To oznacza, że D pokonał zawodników o numerach większych od $3k$. W takim razie C ma numer mniejszy od $3k$ i większy od $3k-2$, czyli numer $3k-1$. Jednak w tej sytuacji numer zawodnika B wynosi co najmniej $3k+1$, a każdy taki zawodnik przegrał z C, w sprzeczności z przypuszczeniem, że B wygrał z C.

Wynika stąd, że największa możliwa liczba trójek remisowych wynosi m.

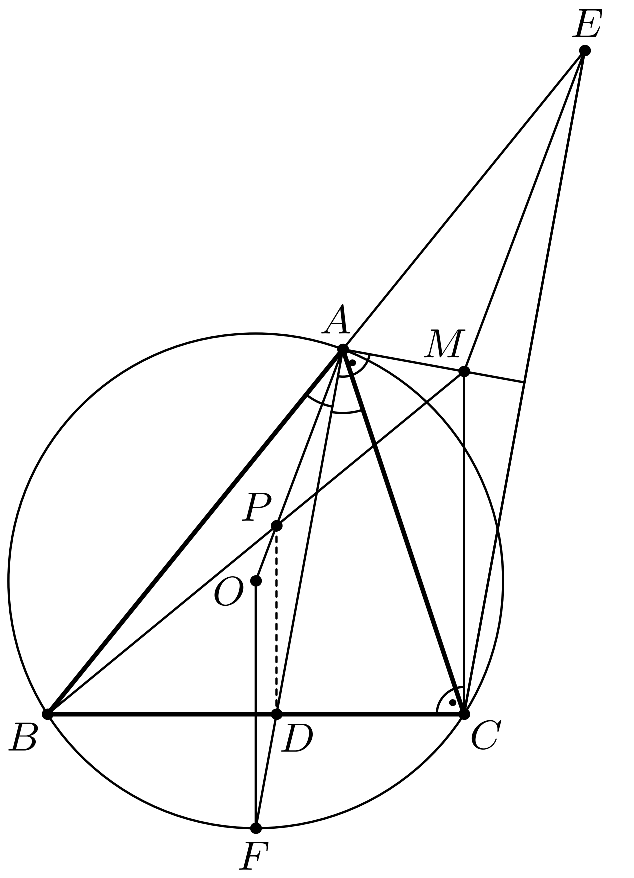
Odpowiedź: Szukana największa możliwa liczba trójek jest równa największej liczbie całkowitej nie przekraczającej $\frac{1}{3}n$.

Zadanie **5**. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, a dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D. Niech M będzie takim punktem, że $MC \perp BC$ oraz $MA \perp AD$. Proste BM i OA przecinają się w punkcie P. Wykazać, że okrąg o środku P i przechodzący przez punkt A jest styczny do prostej BC.

Rozwiązanie



Rysunek 23



Rysunek 24

Jeżeli $AB = AC$, to odcinek AD zawiera punkt O i jest prostopadły do boku BC. Ponadto $BD = DC$ oraz czworokąt $ADCM$ jest prostokątem. W efekcie punkt P jest środkiem odcinka AD, czyli odcinek ten jest średnicą okręgu o środku P i przechodzącego przez punkt A, co pociąga za sobą tezę.

Przyjmijmy dalej, że $AB \neq AC$. Na przedłużeniu boku BA poza punkt A odłóżmy taki punkt E, że $AE = AC$ (rys. 23 i 24, na których przedstawione są odpowiednio przypadki $AB < AC$ i $AB > AC$). Na mocy założenia $AB \neq AC$ punkt E nie leży prostej MC.

Z określenia punktu D i warunku $MA \perp AD$ wnioskujemy, że punkt M leży na dwusiecznej kąta CAE. Ponieważ zaś trójkąt CAE jest równoramienny, więc prosta AM jest symetralną odcinka CE. Zatem $ME = MC$, a przy tym $MA \perp CE$ i w rezultacie $EC \parallel AD$.

Niech F będzie punktem, w którym dwusieczna kąta BAC ponownie przecina okrąg opisany na trójkącie ABC. Punkt F jest środkiem łuku BC tego okręgu. W takim razie $OF \perp BC$, co oznacza, że $OF \parallel MC$.

Przyjrzyjmy się teraz bliżej trójkątom FOA i CME. Są to trójkąty równoramienne, w których $OF = OA$ oraz $MC = ME$. Punkty O, A, M i E leżą po przeciwnej stronie prostej BC niż punkt F, więc z wykazanych wyżej równoległości $AF \parallel EC$ i $OF \parallel MC$ uzyskujemy równość $\sphericalangle OFA = \sphericalangle MCE$. Wobec tego w obu rozważanych trójkątach równoramiennych kąty między ramieniem a podstawą są równe, czyli trójkąty te są podobne. Co więcej, ich podstawy AF i EC są równoległe oraz ramiona OF i MC są równoległe. Zatem ramię OA jest równoległe do ramienia ME.

W ten sposób udowodniliśmy, że $AP \parallel EM$. Stosując twierdzenie Talesa do kątów EBM i EBC otrzymujemy

$$\frac{BP}{PM} = \frac{BA}{AE} = \frac{BD}{DC}.$$

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że $PD \parallel MC$ i w konsekwencji $PD \perp BC$. Ponadto w trójkącie równoramiennym FOA odcinek PD jest równoległy do ramienia OF, czyli trójkąt DPA jest równoramienny i $PD = PA$. To wraz z prostopadłością $PD \perp BC$ dowodzi, że okrąg o środku P przechodzący przez punkt A jest styczny do prostej BC w punkcie D.

Zadanie **6**. Dowieść, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$(1)\quad \Big(\frac{a-b}{c}\Big)^2+\Big(\frac{b-c}{a}\Big)^2+\Big(\frac{c-a}{b}\Big)^2 \geqslant 2\sqrt{2}\Big(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\Big).$$

Rozwiązanie

Sposób **I**

Mnożąc obustronnie nierówność (1) przez liczbę dodatnią $a^2b^2c^2$ uzyskujemy równoważną postać

$$a^2b^2(a-b)^2+b^2c^2(b-c)^2+c^2a^2(c-a)^2 \geqslant 2\sqrt{2}\,abc[ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)].$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a) &= ab(a-b)+c(b^2-a^2)+c^2(a-b) = \\ &= (a-b)[ab-c(a+b)+c^2] = (a-b)(a-c)(b-c), \end{aligned}$$

więc należy wykazać, że

$$(2)\qquad a^2b^2(a-b)^2+b^2c^2(b-c)^2+c^2a^2(c-a)^2 \geqslant 2\sqrt{2}\,abc(a-b)(a-c)(b-c).$$

Obie strony nierówności (1) nie ulegają zmianie pod wpływem cyklicznego przestawienia symboli a, b, c. Możemy wobec tego przyjąć, że a jest największą spośród danych trzech liczb (lub jedną z największych). Jeżeli $b < c$, to nierówność (2) zachodzi, gdyż jej prawa strona jest niedodatnia, lewa zaś — nieujemna. Przypuśćmy zatem, że $a \geqslant b \geqslant c$. Wówczas liczby $x = a - b$ oraz $y = b - c$ są nieujemne, a dowodzoną zależność (2) możemy przepisać w postaci

$$(3)\qquad a^2b^2x^2+b^2c^2y^2+c^2a^2(x+y)^2 \geqslant 2\sqrt{2}\,abcxy(x+y).$$

Zastosujmy nierówność $u + w \geqslant 2\sqrt{uw}$ do liczb nieujemnych $u = b^2c^2y^2$, $w = c^2a^2(x+y)^2$ oraz do liczb nieujemnych $u = abx^2y(x+y)$, $w = 2abc^2y(x+y)$. Otrzymujemy następujące dwie zależności:

$$b^2c^2y^2+c^2a^2(x+y)^2 \geqslant 2abc^2y(x+y)$$

oraz

$$abx^2y(x+y)+2abc^2y(x+y) \geqslant 2\sqrt{2}\,abcxy(x+y);$$

dodając je stronami i redukując wyrazy podobne stwierdzamy, że

$$(4)\qquad abx^2y(x+y)+b^2c^2y^2+c^2a^2(x+y)^2 \geqslant 2\sqrt{2}\,abcxy(x+y).$$

Porównując (3) i (4) widzimy, że po obu stronach występują jednakowe składniki z wyjątkiem pierwszych składników lewych stron. W takim razie nierówność (3) wyniknie z nierówności (4), jeżeli udowodnimy, że te pierwsze składniki spełniają warunek $a^2b^2x^2 \geqslant abx^2y(x+y)$, czyli $abx^2[ab-y(x+y)] \geqslant 0$. Ostatnia zależność jest jednak prawdziwa, gdyż $abx^2 \geqslant 0$ oraz

$$ab = (c+x+y)(c+y) > (x+y)y,$$

a więc wyrażenie w nawiasie kwadratowym ma wartość dodatnią.

W efekcie wykazaliśmy związek (3), co pociąga za sobą tezę zadania.

Sposób **II**

Określmy liczby rzeczywiste x, y, z wzorami

$$x = \frac{b-c}{a}, \qquad y = \frac{c-a}{b}, \qquad z = \frac{a-b}{c}.$$

Wówczas prawdziwy jest związek

$$x+y+z = -xyz, \tag{5}$$

który uzasadniamy za pomocą następujących przekształceń:

$$\begin{aligned} x+y+z &= \tfrac{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}{abc} = \tfrac{c(b^2-a^2)+c^2(a-b)+ab(a-b)}{abc} = \\ &= \tfrac{[c^2-c(a+b)+ab](a-b)}{abc} = \tfrac{(c-b)(c-a)(a-b)}{abc} = -xyz. \end{aligned}$$

Wobec tego dowodzona nierówność (1) przybiera postać

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant -2\sqrt{2}\,xyz. \tag{6}$$

Jeżeli iloczyn xyz jest liczbą nieujemną, to zależność (6) jest spełniona. Przyjmijmy w takim razie, że $xyz < 0$, czyli wszystkie z liczb x, y, z są ujemne albo też dwie są dodatnie, a trzecia jest ujemna. Pierwszą możliwość wykluczamy, gdyż wtedy lewa strona związku (5) byłaby ujemna, prawa zaś — dodatnia. Załóżmy więc, nie ograniczając ogólności dalszego rozumowania, że $x > 0$ i $y > 0$. W tej sytuacji liczby $s = x+y$ oraz $p = xy$ także są dodatnie.

Korzystając z równości (5) stwierdzamy, że

$$z = -\frac{x+y}{1+xy} = -\frac{s}{1+p}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \tfrac{x^2+y^2+z^2}{-xyz} &= \tfrac{(x+y)^2-2xy}{-xyz} - \tfrac{z}{xy} = \tfrac{(x+y)^2}{xy\cdot(-z)} + \tfrac{2}{z} - \tfrac{z}{xy} = \\ &= \tfrac{s(1+p)}{p} - \tfrac{2(1+p)}{s} + \tfrac{s}{p(1+p)} = \tfrac{2+2p+p^2}{p(1+p)}\cdot s - \tfrac{2(1+p)}{s}, \end{aligned}$$

co pozwala przepisać tezę (6) w równoważnej postaci

$$\frac{2+2p+p^2}{p(1+p)}\cdot s - \frac{2(1+p)}{s} \geqslant 2\sqrt{2}. \tag{7}$$

Potraktujmy różnicę R stojącą po lewej stronie nierówności (7) jako funkcję dodatniej zmiennej s przy ustalonej dodatniej wartości p. W różnicy tej odjemna jest funkcją rosnącą, a odjemnik — funkcją malejącą zmiennej s. Stąd całe wyrażenie jest funkcją rosnącą zmiennej s.

Pozostała część rozwiązania rozpada się na dwa przypadki.

Przypadek **1.** $p \leqslant 1$.

Wówczas na mocy zależności $s = x + y \geqslant 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{p}$ i uczynionych przed chwilą spostrzeżeń otrzymujemy

$$\begin{aligned} R \; &\geqslant \tfrac{2+2p+p^2}{p(1+p)} \cdot 2\sqrt{p} - \tfrac{2(1+p)}{2\sqrt{p}} = \tfrac{2(2+2p+p^2)-(1+p)^2}{(1+p)\sqrt{p}} = \tfrac{3+2p+p^2}{(1+p)\sqrt{p}} = \\ &= 3 + \tfrac{(3+2p+p^2)-3(1+p)\sqrt{p}}{(1+p)\sqrt{p}} = 3 + \tfrac{(1-\sqrt{p})(3+2p-p\sqrt{p})}{(1+p)\sqrt{p}} \geqslant 3. \end{aligned}$$

Przypadek **2.** $p > 1$.

Licznik ułamka definiującego liczbę dodatnią x musi być dodatni, skąd wynika związek $b > c$. Tym bardziej $b > c - a$, czyli $y < 1$. Zależność $xy = p > 1$ dowodzi więc, że $x > 1$. W rezultacie liczba $(x - 1)(1 - y) = s - (1 + p)$ jest dodatnia. Uzyskana nierówność $s > 1 + p$ wraz z monotonicznym zachowaniem się wyrażenia R jako funkcji zmiennej s prowadzi do wniosku, że

$$R > \frac{2 + 2p + p^2}{p(1 + p)} \cdot (1 + p) - \frac{2(1 + p)}{(1 + p)} = \frac{2 + p^2}{p} = 2\sqrt{2} + \frac{(\sqrt{2} - p)^2}{p} \geqslant 2\sqrt{2}.$$

W obu przypadkach udowodniliśmy zależność (7), co kończy rozwiązanie.

Uwaga 1.

Nierówność (1) staje się równością jedynie wtedy, gdy obie jej strony są zerami, czyli gdy $a = b = c$. Można to zaobserwować w obu rozwiązaniach. Na przykład w sposobie II przypadki **1** i **2** prowadzą do ostrej nierówności $R > 2\sqrt{2}$, a jedyna możliwość równości (dla $x = y = z = 0$) jest ukryta w zdaniu następującym po zależności (6).

Jednak stałej $2\sqrt{2}$ stojącej w tezie (1) nie można zastąpić żadną większą liczbą rzeczywistą. Dla dowolnej liczby $t > 0$ określmy bowiem $a = 1 + \sqrt{2}t$, $b = 1$ oraz $c = t$. Przeprowadzając rachunek stwierdzamy, że wyrażenia

$$F(t) = a^2b^2(a-b)^2 + b^2c^2(b-c)^2 + c^2a^2(c-a)^2 \quad \text{i} \quad G(t) = abc(a-b)(a-c)(b-c),$$

występujące w równoważnym tezie zadania związku (2), są wielomianami zmiennej t o niezerowych współczynnikach najniższego stopnia wynoszących odpowiednio $4t^2$ i $\sqrt{2}t^2$. Zatem dla danej stałej L zależność $F(t) \geqslant L \cdot G(t)$ może być spełniona dla dowolnego $t > 0$ tylko wtedy, gdy $L \leq \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Uwaga 2.

Sposób II pozwala na wyznaczenie największej stałej po prawej stronie nierówności (1) przy słabszym założeniu, że a, b, c są liczbami rzeczywistymi różnymi od zera (niekoniecznie dodatnimi). Wówczas w przypadku **2** znikają warunki $y < 1$

i $s > 1+p$. Dla każdego $p > 0$ w mocy pozostaje jedynie związek $s \geqslant 2\sqrt{p}$, z którego tak jak w przypadku **1** uzyskujemy oszacowanie

$$R \geqslant \frac{3 + 2p + p^2}{(1 + p)\sqrt{p}}.$$

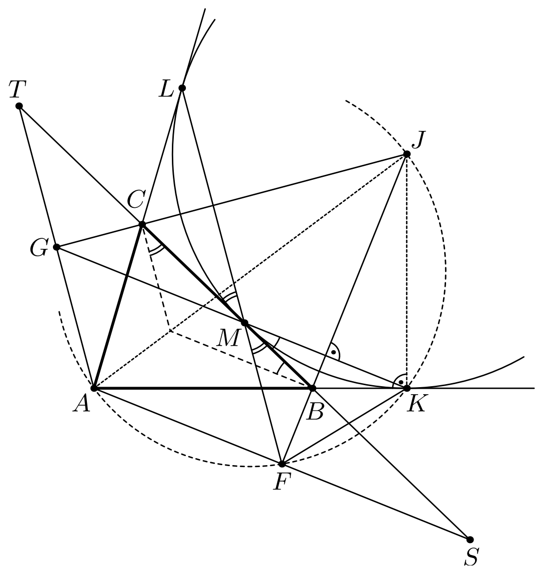
Można obliczyć, że prawa strona powyższej zależności jako funkcja dodatniej zmiennej p osiąga najmniejszą wartość $M = 4\sqrt{\sqrt{2} - 1}$ dla $p = 1 + \sqrt{2}$. Ponadto z taką stałą M po prawej stronie nierówność (1) staje się równością dla liczb $a = 2$, $b = (2 - \sqrt{2})(1 - \sqrt{\sqrt{2} + 1})$ oraz $c = (2 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{\sqrt{2} + 1})$. Wykonanie szczegółowych rachunków pozostawiamy Czytelnikowi.

LIII Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna

Zadanie **1**. Dany jest trójkąt ABC. Punkt J jest środkiem okręgu stycznego do odcinka BC w punkcie M oraz do prostych AB i AC odpowiednio w punktach K i L leżących poza bokami trójkąta. Proste LM i BJ przecinają się w punkcie F, a proste KM i CJ przecinają się w punkcie G. Proste AF i AG przecinają prostą BC odpowiednio w punktach S i T. Wykazać, że punkt M jest środkiem odcinka ST.

Rozwiązanie

Prosta BJ jest dwusieczną kąta zewnętrznego trójkąta ABC przy wierzchołku B



Rysunek 25

(rys. 25), a punkty K i M są względem niej symetryczne. To oznacza, że prosta KM jest prostopadła do dwusiecznej BJ, a więc równoległa do dwusiecznej kąta wewnętrznego przy wierzchołku B. Wynika stąd równość

$$\sphericalangle BMK = \tfrac{1}{2}\sphericalangle ABC. \tag{1}$$

Podobnie uzasadniamy, że prosta LM jest równoległa do dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta ABC przy wierzchołku C i w efekcie

$$\sphericalangle CML = \tfrac{1}{2}\sphericalangle BCA. \tag{2}$$

Związki (1) i (2) dowodzą, że

$$\sphericalangle KML = 180^\circ - \tfrac{1}{2}(\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA) = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\sphericalangle CAB. \tag{3}$$

Zależność $\sphericalangle KML > 90^\circ$ połączona z prostopadłością $KM \perp BJ$ wskazuje, że punkt F przecięcia prostych LM i BJ leży po przeciwnej stronie prostej KM niż punkty J i L. Wobec tego z równości (3) otrzymujemy

$$\sphericalangle FMK = 180^\circ - \sphericalangle KML = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\sphericalangle CAB. \tag{4}$$

Rozpatrując trójkąt prostokątny, którego wierzchołkami są punkty F, M oraz punkt przecięcia prostych KM i BJ, stwierdzamy na mocy związku (4), że

$$\sphericalangle MFJ = 90^\circ - \sphericalangle FMK = \tfrac{1}{2}\sphericalangle CAB.$$

A ponieważ punkty K i M są symetryczne względem prostej BJ, więc

$$\sphericalangle KFJ = \sphericalangle MFJ = \tfrac{1}{2}\sphericalangle CAB = \sphericalangle JAK. \tag{5}$$

Punkty A i F leżą po przeciwnej stronie prostej BC niż punkty J i K. Zatem w myśl zależności (5) punkty A, F, K oraz J leżą na jednym okręgu, skąd wynika związek $\sphericalangle AFJ = \sphericalangle AKJ = 90^\circ$. Uzyskana prostopadłość $AS \perp BJ$ wraz z faktem, że punkty K i M są symetryczne względem prostej BJ, prowadzi do wniosku, że odcinki AK i SM są symetryczne względem tej prostej. W rezultacie $AK = SM$ i analogicznie uzasadniamy, że $AL = TM$. Ponadto odcinki AK i AL mają równe długości, gdyż są one odcinkami stycznych do danego w treści zadania okręgu, poprowadzonych z punktu A. W konsekwencji dostajemy zależność $SM = TM$, która kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie **2**. Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą całkowitą oraz niech $a_2, a_3, \ldots, a_n$ będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi, dla których $a_2 a_3 \ldots a_n = 1$. Udowodnić, że

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \ldots (1+a_n)^n > n^n.$$

Rozwiązanie

Ustalmy wartość $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$. Korzystając z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną uzyskujemy związek

$$1 + a_k = \underbrace{\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-1} + \ldots + \frac{1}{k-1}}_{k-1} + a_k \geqslant k \cdot \sqrt[k]{\frac{1}{(k-1)^{k-1}} a_k},$$

czyli

$$(1) \qquad (1+a_k)^k \geqslant \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} a_k.$$

Ponadto równość w zależności (1) ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną została zastosowana do n jednakowych liczb, a więc jedynie dla $a_k = \frac{1}{k-1}$.

Mnożąc teraz stronami związki (1) dla $k = 2, 3, \ldots, n$ i biorąc pod uwagę dany w treści zadania warunek $a_2 a_3 \ldots a_n = 1$ otrzymujemy

$$(2) \qquad (1+a_2)^2(1+a_3)^3 \ldots (1+a_n)^n \geqslant \frac{2^2}{1^1} \cdot \frac{3^3}{2^2} \cdot \ldots \cdot \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot a_2 a_3 \ldots a_n = n^n.$$

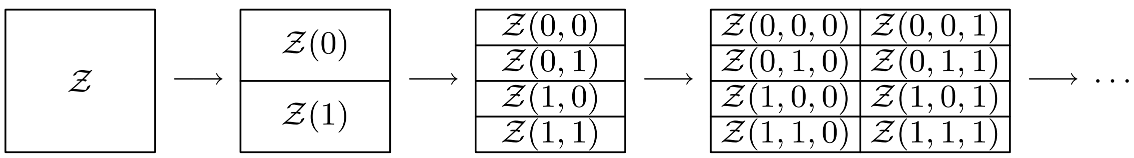
Nierówność (2) staje się równością jedynie wtedy, gdy $a_k = \frac{1}{k-1}$ dla $k = 2, 3, \ldots, n$. Wówczas jednak liczba a_2 byłaby równa 1, a liczby $a_3, a_4, \ldots, a_n$ byłyby mniejsze od 1, wbrew zależnościom $a_2 a_3 \ldots a_n = 1$ i $n \geqslant 3$. Wobec tego nierówność (2) jest ostra, co pokrywa się z tezą zadania.

Zadanie **3**. Gra w *zgadującego* i *kłamcę* rozgrywa się pomiędzy dwoma graczami A i B. Reguły gry są zależne od dwóch dodatnich liczb całkowitych k i n, które są znane obu graczom. Na początku Ala wybiera liczby całkowite x i N, które spełniają nierówności $1 \leqslant x \leqslant N$. Gracz A trzyma liczbę x w tajemnicy, natomiast liczbę N przekazuje graczowi B. Gracz B z kolei próbuje zdobyć informacje o liczbie x zadając graczowi A pytania. Przed każdym pytaniem gracz B wybiera dowolny zbiór S dodatnich liczb całkowitych, po czym pyta gracza A, czy liczba x należy do zbioru S. Gracz B może zadać tyle pytań, ile chce, może także wielokrotnie wybierać ten sam zbiór S. Na każde pytanie gracza B Ala musi natychmiast odpowiedzieć *tak* albo *nie*. Może przy tym skłamać dowolną liczbę razy, jednak odpowiadając na dowolne $k+1$ kolejnych pytań co najmniej raz musi powiedzieć prawdę. Po zakończeniu zadawania pytań gracz B musi podać zbiór X złożony z co najwyżej n dodatnich liczb całkowitych. Jeżeli liczba x należy do zbioru X, to gracz B wygrywa, a w przeciwnym wypadku gracz B przegrywa. Dowieść, że:

1) jeżeli $n \geqslant 2^k$, to gracz B może zagwarantować sobie zwycięstwo;
2) dla każdej dostatecznie dużej liczby k istnieje taka liczba całkowita $n \geqslant 1{,}99^k$, przy której gracz B nie może zagwarantować sobie wygranej.

Rozwiązanie

1) Gracz A to w dalszym ciągu Ala, a gracz B — to Bartek. Należy udowodnić, że Bartek po zakończeniu zadawania pytań może podać 2^k-elementowy zbiór X, do którego należy liczba x. Wykażemy w tym celu, że jeżeli $N > 2^k$, to Bartek jest w stanie wyznaczyć $N-2^k$ elementów zbioru $\mathcal{S} = \{1, 2, \ldots, N\}$ różnych od x. Pozwoli mu na to procedura pozwalająca na wskazanie elementu różnego od x w dowolnym zbiorze liczącym więcej niż 2^k elementów. Stosując ją $N-2^k$ razy Bartek wykluczy kolejno $N-2^k$ różnych elementów zbioru $\mathcal{S}$, pozostając na koniec z 2^k elementami, wśród których znajduje się liczba x. Przedstawimy więc taką procedurę; najpierw opiszemy pewną pomocniczą konstrukcję.



Rysunek 26

Każdy zbiór $\mathcal{Z}$ mający co najmniej 2^k elementów dzielimy na 2^k niepustych zbiorów w następujący sposób. Rozbijamy zbiór $\mathcal{Z}$ na dwa zbiory $\mathcal{Z}(0)$ i $\mathcal{Z}(1)$ o co najmniej 2^{k-1} elementach. Następnie każdy z nich dzielimy na dwa zbiory, odpowiednio $\mathcal{Z}(0,0)$, $\mathcal{Z}(0,1)$ i $\mathcal{Z}(1,0)$, $\mathcal{Z}(1,1)$, o co najmniej 2^{k-2} elementach. Kontynuacja podziałów (rys. 26) prowadzi do 2^k niepustych zbiorów $\mathcal{Z}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k)$, gdzie $\varepsilon_i \in \{0,1\}$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$.

Procedura wskazywania elementu różnego od x w zbiorze $\mathcal{T}$ liczącym więcej niż 2^k elementów składa się z trzech kroków.

Krok **1.** Najpierw Bartek pyta, czy liczba x należy do zbioru $\mathcal{T}(0)$. Wówczas Ala odpowiadając *tak* lub *nie* w istocie wybiera wartość $c_1 \in \{0,1\}$, dla której twierdzi — być może fałszywie — że liczba x nie należy do zbioru $\mathcal{T}(c_1)$. Potem dla $j = 2, 3, \ldots, k$ Bartek pyta, czy liczba x należy do zbioru $\mathcal{T}(c_1, c_2, \ldots, c_{j-2}, c_{j-1}, 0)$, uzyskawszy odpowiedź *tak* lub *nie* określa odpowiednio $c_j = 1$ albo $c_j = 0$. Prawdziwość tej odpowiedzi implikuje, że liczba x nie należy do zbioru $\mathcal{T}(c_1, c_2, \ldots, c_{j-1}, c_j)$. Stąd i z zawierań

$$\mathcal{T}(c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}, c_k) \subset \mathcal{T}(c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}) \subset \ldots \subset \mathcal{T}(c_1, c_2) \subset \mathcal{T}(c_1)$$

wynika zależność $x \notin \mathcal{T}(c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}, c_k)$ przy założeniu, że chociaż jedna z dotychczasowych k odpowiedzi Ali była prawdziwa.

Krok **2.** Bartek wybiera dowolny element $u \in \mathcal{T}(c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}, c_k)$ oraz pyta, czy liczba x należy do jednoelementowego zbioru $\{u\}$. Jeżeli Ala odpowie *nie*, to każda spośród $k+1$ udzielonych do tej pory odpowiedzi będzie pociągała za sobą związek $x \neq u$. Co najmniej jedna z odpowiedzi musi być prawdziwa. Zatem Bartek osiąga zaplanowany cel i kończy całą procedurę. Przyjmijmy w takim razie, że Ala odpowiedziała *tak*.

Krok **3.** Bartek przeprowadza postępowanie analogiczne do Kroku **1** zastępując jednak zbiór $\mathcal{T}$ mniejszym zbiorem $\mathcal{U} = \mathcal{T} \setminus \{u\}$. Zadając k pytań Bartek definiuje takie wartości $d_1, d_2, \ldots, d_{k-1}, d_k \in \{0,1\}$, że z odpowiedzi otrzymanych od Ale wynikają relacje

$$x \notin \mathcal{U}(d_1, d_2, \ldots, d_{j-1}, d_j) \qquad \text{dla } j = 1, 2, \ldots, k.$$

Odpowiedź udzielona w Kroku **2** orzeka zaś, że liczba x nie należy do zbioru $\mathcal{U}$. Co najmniej jedna z wymienionych $k+1$ odpowiedzi musi być prawdziwa i wobec tego liczba x nie należy do zbioru $\mathcal{U}(d_1, d_2, \ldots, d_{k-1}, d_k)$. Bartek może więc wskazać dowolny jego element jako element zbioru $\mathcal{T}$ różny od x.

2) Wybierzmy liczby rzeczywiste α i β, dla których $1{,}99 < \alpha < \beta < 2$. Niech ponadto k będzie dostatecznie dużą liczbą całkowitą, co w naszym wypadku oznacza, że spełnione są nierówności: $k > \frac{1}{\alpha - 1{,}99}$ oraz $k > \frac{\alpha(\beta-1)}{(\beta-\alpha)(2-\beta)}$. Wtedy

$$\alpha^k - 1{,}99^k = (\alpha - 1{,}99)(\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2} \cdot 1{,}99 + \alpha^{k-3} \cdot 1{,}99^2 + \ldots + 1{,}99^{k-1}) >$$
$$> (\alpha - 1{,}99) \cdot k \cdot 1{,}99^{k-1} > (\alpha - 1{,}99) \cdot k > 1.$$

Wobec tego istnieje liczba całkowita n spełniająca nierówności $1{,}99^k < n < \alpha^k$.

Udowodnimy, że dla takiej wartości n Ala, przekazując na początku Bartkowi liczbę $N = n$, może udzielać odpowiedzi nie pozwalających mu na zagwarantowanie sobie zwycięstwa. Wskażemy mianowicie taką strategię Ali, że Bartek nie będzie w stanie wyznaczyć nawet jednego elementu zbioru $\mathcal{S} = \{1, 2, \ldots, n\}$ różnego od x. Inaczej mówiąc, dla *każdej* liczby $i \in \mathcal{S}$ wśród dowolnych $k+1$ kolejnych odpowiedzi Ali będzie istniała odpowiedź, która jest prawdziwą odpowiedzią na pytanie, czy liczba i należy do zbioru podanego przez Bartka. Wówczas po zadaniu dowolnej liczby pytań Bartek nie zdobędzie żadnej informacji o liczbie x, a więc nie będzie mógł podać żadnego zbioru X o co najwyżej n elementach, do którego na pewno należy liczba x.

Przez cały czas Ala będzie pamiętać pewien n-wyrazowy ciąg o wyrazach rzeczywistych, zmieniając go po każdej swojej odpowiedzi. Przed rozpoczęciem zadawania pytań będzie to ciąg o wszystkich wyrazach równych 1. Przyjmijmy z kolei, że w pewnym momencie Bartek pyta, czy liczba x należy do zbioru S. Odpowiedź (prawdziwa lub nie) Ali może być potraktowana jako stwierdzenie, że $x \in T$, gdzie T jest jednym ze zbiorów S, $\mathcal{S} \setminus S$. Wtedy Ala zmienia swój dotychczasowy ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ na ciąg $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$, w którym

$$a'_i = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i \in T, \\ \beta a_i, & \text{gdy } i \notin T \text{ dla i=1,2,...,n.} \end{cases}$$

Po dowolnej odpowiedzi Ali wyraz na i-tej pozycji bieżącego ciągu wynosi 1 wtedy i tylko wtedy, gdy udzielona odpowiedź zgodnie z prawdą stwierdza, czy liczba $i \in \mathcal{S}$ należy do zbioru podanego przez Bartka. Zatem Ala zrealizuje swoją strategię wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $i \in \mathcal{S}$ wśród dowolnych $k + 1$ kolejno otrzymanych ciągów będzie istniał ciąg, którego i-ty wyraz jest równy 1. A ponieważ każdy wyraz różny od 1 jest β razy większy od wyrazu stojącego na tej samej pozycji w poprzednim ciągu, więc Ala musi zapewnić, aby wszystkie wyrazy kolejno uzyskiwanych ciągów nie przekraczały β^k. Do tego zaś wystarczy, by w dowolnym ciągu suma wszystkich n wyrazów była mniejsza od β^k.

Suma wyrazów początkowego ciągu wynosi n, czyli jest mniejsza od α^k i tym bardziej od β^k. Pozostaje dowieść, że jeśli suma wyrazów bieżącego ciągu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jest mniejsza od β^k, to na pytanie zadane przez Bartka Ala może udzielić odpowiedzi, po której suma wyrazów następnego ciągu także będzie mniejsza od β^k. Przypuśćmy więc, że po odpowiedzi *tak* powstaje ciąg $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, a po odpowiedzi *nie* — ciąg $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Wówczas dla każdej liczby $i \in \mathcal{S}$ jedna z liczb b_i, c_i wynosi 1, a druga jest równa βa_i. Wobec tego suma liczb $b = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ i $c = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$ spełnia zależność

$b + c = (b_1 + c_1) + (b_2 + c_2) + \ldots + (b_n + c_n) =$

$= (1 + \beta a_1) + (1 + \beta a_2) + \ldots + (1 + \beta a_n) =$

$= n + \beta(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) < n + \beta^{k+1} < \alpha^k + \beta^{k+1}$.
Ponadto prawa strona jest mniejsza od $2\beta^k$. Nierówność $\alpha^k + \beta^{k+1} < 2\beta^k$ można bowiem zapisać w równoważnej postaci $(\frac{\beta}{\alpha})^k > \frac{1}{2-\beta}$, ale

$$(\tfrac{\beta}{\alpha})^k = \big(1 + \tfrac{\beta-\alpha}{\alpha}\big)^k > 1 + k\tfrac{\beta-\alpha}{\alpha} > 1 + \tfrac{\alpha(\beta-1)}{(\beta-\alpha)(2-\beta)}\tfrac{\beta-\alpha}{\alpha} = 1 + \tfrac{\beta-1}{2-\beta} = \tfrac{1}{2-\beta}.$$

Z otrzymanego związku $b + c < 2\beta^k$ wynika, że przynajmniej jedna z liczb b, c jest mniejsza od β^k. W efekcie Ala zawsze może udzielić odpowiedzi, po której uzyska ciąg o sumie wyrazów mniejszej od β^k, realizując tym samym strategię nie pozwalającą Bartkowi na zagwarantowanie sobie wygranej.

Zadanie **4**. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f określone na zbiorze wszystkich liczb całkowitych i przyjmujące wartości w tym samym zbiorze, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c spełniających równość $a+b+c=0$ prawdziwa jest zależność

$$(1)\quad (f(a))^2+(f(b))^2+(f(c))^2 = 2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a).$$

Rozwiązanie

Podstawiając $a=b=c=0$ w warunku (1) uzyskujemy $3(f(0))^2 = 6(f(0))^2$, czyli

$$(2)\qquad f(0)=0.$$

Niech z kolei x będzie dowolną liczbą całkowitą. Przyjmując wartości $a=x$, $b=-x$ oraz $c=0$ w równości (1), następnie wykorzystując równość (2) stwierdzamy, że $(f(x))^2+(f(-x))^2 = 2f(x)f(-x)$, a więc $(f(x)-f(-x))^2=0$. W efekcie

$$(3)\qquad f(x)=f(-x) \qquad \text{dla każdego } x.$$

Zatem funkcja f jest nieparzysta.

Przypuśćmy, że $f(d)=0$ dla pewnej liczby całkowitej $d\neq 0$. Niech y będzie dowolną liczbą całkowitą. Wówczas stosując równość (1) dla liczb $a=d$, $b=y$ i $c=-y-d$ otrzymujemy $(f(y))^2+(f(-y-d))^2 = 2f(y)f(-y-d)$, co wraz z zależnością (3) prowadzi do wniosku, że $(f(y)-f(y+d))^2=0$, skąd

$$(4)\qquad f(y)=f(y+d) \qquad \text{dla każdego } y.$$

Wobec tego funkcja f jest okresowa o okresie d.

Niech $k=f(1)$. Podstawiając $a=b=1$ i $c=-2$ w równości (1) i korzystając ze związku (3) dostajemy $2k^2+(f(2))^2 = 2k^2+4kf(2)$, czyli $f(2)=0$ lub $f(2)=4k$.

Jeżeli $f(2)=0$, to w myśl zależności (4) funkcję f można opisać wzorem

$$f(n)=\begin{cases} 0, & \text{gdy } 2\mid n,\\ k, & \text{gdy } 2\nmid n.\end{cases}$$

Dla dowolnej wartości k taka funkcja ma wymaganą własność: obie strony warunku (1) są równe 0, gdy wszystkie z liczb a, b, c są parzyste, albo też są równe $2k^2$, gdy dokładnie dwie spośród tych trzech liczb są nieparzyste.

Przejdźmy teraz do przypadku, w którym $f(2)=4k$ oraz $k\neq 0$.

Niech ℓ będzie taką dodatnią liczbą całkowitą, że

$$(5)\qquad f(i)=ki^2 \qquad \text{dla } i=1,2,\ldots,\ell;$$

jest to prawda dla $\ell=1$ i $\ell=2$. Zastosujmy zależność (1) dla $a=1$, $b=\ell$ oraz $c=-\ell-1$; na mocy związku (3) uzyskujemy

$$k^2+k^2\ell^4+(f(\ell+1))^2 = 2k^2\ell^2+2k\ell^2 f(\ell+1)+2f(\ell+1)k.$$

Przekształcając równoważnie powyższą równość otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned}
(f(\ell+1))^2 - k(2\ell^2+2)f(\ell+1) + k^2(\ell^4 - 2\ell^2+1) &= 0,\\
(f(\ell+1))^2 - [k(\ell+1)^2 + k(\ell-1)^2]f(\ell+1) + k^2(\ell^2-1)^2 &= 0,\\
[f(\ell+1) - k(\ell+1)^2]\cdot[f(\ell+1) - k(\ell-1)^2] &= 0.
\end{aligned}$$

Przypuśćmy, że

$$f(\ell+1) \neq k(\ell+1)^2, \tag{6}$$

czyli $f(\ell+1) = k(\ell-1)^2$. Podstawmy wartości $a = \ell+1$, $b = 1-\ell$ oraz $c = -2$ w warunku (1); korzystając ze związków (3) i (5) dostajemy

$$k^2(\ell-1)^4 + k^2(\ell-1)^4 + 16k^2 = 2k(\ell-1)^2k(\ell-1)^2 + 2k(\ell-1)^2\cdot 4k + 2\cdot 4k\cdot k(\ell-1)^2.$$

To oznacza, że $16k^2 = 16k^2(\ell-1)^2$, a więc $(\ell-1)^2 = 1$ i $\ell = 2$. W takim razie $f(3) = f(\ell+1) = k(\ell-1)^2 = k$. Stosując równość (1) dla $a = 1$, $b = 3$ i $c = -4$ stwierdzamy, że

$$k^2 + k^2 + (f(4))^2 = 2k^2 + 2kf(4) + 2kf(4)$$

i w rezultacie $(f(4))^2 = 4kf(4)$, skąd $f(4) = 0$ lub $f(4) = 4k$. Jednocześnie z zależności (1) dla liczb $a = b = 2$ i $c = -4$ uzyskujemy

$$2(f(2))^2 + (f(4))^2 = 2f(2)^2 + 4f(2)f(4),$$

co daje $(f(4))^2 = 4f(2)f(4) = 16kf(4)$, czyli $f(4) = 0$ lub $f(4) = 16k$. W konsekwencji $f(4) = 0$ i na podstawie warunku (4) funkcja f wyraża się wzorem

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } 4\,|\,n,\\ k, & \text{gdy } 2\nmid n,\\ 4k, & \text{gdy } 2\,|\,n \text{ i } 4\nmid n.\end{cases}$$

Sprawdzimy, że takie funkcje mają własność opisaną w treści zadania. W tym celu weźmy pod uwagę dowolne liczby całkowite a, b, c, dla których $a+b+c = 0$. Przyjmijmy najpierw, że jedna z tych liczb, na przykład a, jest podzielna przez 4. Wtedy $f(a) = 0$, a ponadto liczby b i c są obie nieparzyste, obie parzyste i niepodzielne przez 4, albo też obie podzielne przez 4. We wszystkich trzech przypadkach prawdziwa jest równość $f(b) = f(c)$. W tej sytuacji lewa strona zależności (1) wynosi $(f(b))^2 + (f(c))^2$, a prawa strona wynosi $2f(b)f(c)$; obie strony są więc równe. Jeżeli natomiast żadna z liczb a, b, c nie jest podzielna przez 4, to dwie z nich są nieparzyste, a trzecia jest parzysta i niepodzielna przez 4. Wobec tego

$$(f(a))^2 + (f(b))^2 + (f(c))^2 = k^2 + k^2 + (4k)^2 = 18k^2$$

oraz

$$2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a)=2k\cdot k+2k\cdot 4k+2\cdot 4k\cdot k=18k^2,$$

co kończy dowód związku (1).

Pozostaje możliwość, że przypuszczenie (6) jest fałszywe. Wtedy dla każdej liczby całkowitej $\ell\geqslant 1$ z równości $f(\ell)=k\ell^2$ wynika równość $f(\ell+1)=k(\ell+1)^2$. Wówczas na mocy zasady indukcji matematycznej oraz w oparciu o zależności (2) i (3) stwierdzamy, że $f(n)=kn^2$ dla dowolnej liczby całkowitej n. Takie funkcje również spełniają warunki zadania: dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c o sumie równej zeru mamy bowiem

$$\begin{aligned}(f(a))^2+(f(b))^2+(f(c))^2 &= k^2(a^4+b^4+(a+b)^4)=\\ &=2k^2(a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4)=\\ &=2k^2(a^2b^2+b^2(a+b)^2+(a+b)^2a^2)=\\ &=2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a).\end{aligned}$$

Odpowiedź: Żądaną własność mają funkcje opisane wzorami

$$f(n)=\begin{cases}0, & \text{gdy } 2\mid n,\\ k, & \text{gdy } 2\nmid n\end{cases},\qquad f(n)=\begin{cases}0, & \text{gdy } 4\mid n,\\ k, & \text{gdy } 2\nmid n,\\ 4k, & \text{gdy } 2\mid n \text{ i } 4\nmid n,\end{cases}\qquad \text{oraz}\quad f(n)=kn^2,$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Zadanie **5**. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest prosty, a punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z tego wierzchołka. Punkt X leży wewnątrz odcinka CD. Na odcinkach AX i BX wybrano odpowiednio takie punkty K i L, że spełnione są równości $BK = BC$ i $AL = AC$. Proste AL i BK przecinają się w punkcie M. Wykazać, że $MK = ML$.

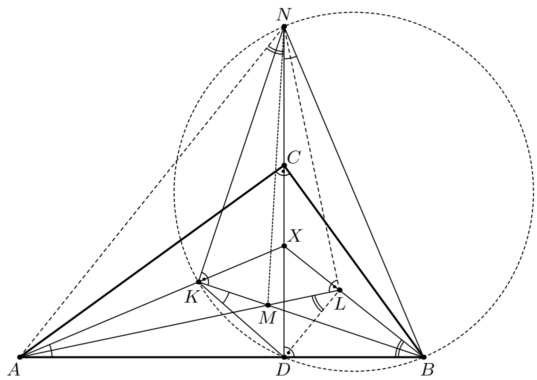
Rozwiązanie

Trójkąty prostokątne CDB i ACB są podobne (cecha *kąt-kąt-kąt*), co pociąga za sobą równość stosunków (rys. 27)

$$\frac{DB}{BC} = \frac{CB}{BA}.$$

Warunek $BK = BC$ prowadzi więc do zależności

$$\frac{DB}{BK} = \frac{KB}{BA}.$$



Rysunek 27

Zatem trójkąty DBK i KBA są podobne (cecha *bok-kąt-bok*). W efekcie

$$\sphericalangle BKD = \sphericalangle BAK = \sphericalangle XAD. \tag{1}$$

Niech N będzie punktem półprostej $DC^{\to}$ wyznaczonym przez równość

$$DN \cdot DX = DA \cdot DB.$$

Wówczas trójkąty prostokątne NDB i ADX są podobne (cecha *bok-kąt-bok*). W takim razie

$$\sphericalangle BND = \sphericalangle XAD. \tag{2}$$

Łącząc związki (1) i (2) stwierdzamy, że

$$\sphericalangle BKD = \sphericalangle BND.$$

Na czworokącie $KDBN$ można więc opisać okrąg, zatem $\sphericalangle BKN = \sphericalangle BDN = 90°$. Stosując teraz twierdzenie Pitagorasa obliczamy:

$$\begin{aligned} MK^2 &= MN^2 - KN^2 = MN^2 - (BN^2 - BK^2) = MN^2 - (BN^2 - BC^2) = \\ &= MN^2 - [(BD^2 + DN^2) - (BD^2 + DC^2)] = MN^2 - DN^2 + DC^2. \end{aligned}$$

Analogicznie dowodzimy, że trójkąty DAL i LAB są podobne, trójkąty prostokątne ADN i XDB są podobne, na czworokącie $ADLN$ można opisać okrąg, kąt ALN jest prosty i wreszcie $ML^2 = MN^2 - DN^2 + DC^2$. Stąd uzyskujemy postulowaną zależność $MK = ML$.

Zadanie **6**. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których istnieją nieujemne liczby całkowite a_1, a_2, ..., a_n spełniające równości

$$\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_2}}+\ldots+\frac{1}{2^{a_n}}=\frac{1}{3^{a_1}}+\frac{2}{3^{a_2}}+\ldots+\frac{n}{3^{a_n}}=1.$$

Rozwiązanie

Załóżmy, że nieujemne liczby całkowite a_1, a_2, ..., a_n spełniają równość

$$\frac{1}{3^{a_1}}+\frac{2}{3^{a_2}}+\ldots+\frac{n}{3^{a_n}}=1.$$

Niech m oznacza największą wartość występującą wśród tych n liczb. Mnożąc obustronnie powyższy związek przez 3^m otrzymujemy zależność

$$1\cdot 3^{m-a_1}+2\cdot 3^{m-a_2}+\ldots+n\cdot 3^{m-a_n}=3^m,$$

w której prawa strona jest nieparzysta, a lewa strona ma tę samą parzystość co suma $1+2+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$. Zatem liczba $\frac{1}{2}n(n+1)$ jest nieparzysta, czyli liczby n i $n+1$ nie są podzielne przez 4. Liczba n daje więc przy dzieleniu przez 4 resztę 1 lub 2.

Udowodnimy indukcyjnie, że dowolna liczba całkowita $n\geqslant 1$ dająca resztę 1 lub 2 z dzielenia przez 4 spełnia warunki zadania. W tym celu wskazujemy najpierw przykłady odpowiednich ciągów $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ dla $n=1,5,9,13,17$:

$$(1),\qquad (2,1,3,4,4),\qquad (2,3,3,3,3,4,4,4,4),$$
$$(2,3,3,4,4,4,5,4,4,5,4,5,5),\qquad (3,2,2,4,4,5,5,6,5,6,6,6,6,6,6,6,5).$$

W kroku indukcyjnym wykażemy, że jeśli wymaganą własność ma liczba:

1. $n=4k+1$ dla pewnego $k\geqslant 0$, to ma ją również liczba $n=4k+2$;

2. $n=4k+2$ dla pewnego $k\geqslant 2$, to ma ją również liczba $n=4k+13$.

Niech nieujemne liczby całkowite a_1, a_2, ..., a_n spełniają dane równości.

Dowód zdania **1.** Określmy liczby b_1, b_2, ..., b_{4k+1}, b_{4k+2} wzorem

$$b_i=\begin{cases} a_i & \text{dla } i\neq 2k+1, 4k+2,\\ a_{2k+1}+1 & \text{dla } i=2k+1, 4k+2.\end{cases}$$

Wówczas różnica pomiędzy liczbami

$$\tfrac{1}{2^{b_1}}+\tfrac{1}{2^{b_2}}+\ldots+\tfrac{1}{2^{b_{4k+1}}}+\tfrac{1}{2^{b_{4k+2}}}\qquad\text{oraz}\qquad \tfrac{1}{2^{a_1}}+\tfrac{1}{2^{a_2}}+\ldots+\tfrac{1}{2^{a_{4k+1}}}=1$$

wynosi

$$\tfrac{1}{2^{b_{2k+1}}}+\tfrac{1}{2^{b_{4k+2}}}-\tfrac{1}{2^{a_{2k+1}}}=\tfrac{1}{2^{a_{2k+1}+1}}+\tfrac{1}{2^{a_{2k+1}+1}}-\tfrac{1}{2^{a_{2k+1}}}=\tfrac{1+1-2}{2^{a_{2k+1}+1}}=0.$$

Z kolei różnica pomiędzy liczbami

$$\tfrac{1}{3^{b_1}}+\tfrac{1}{3^{b_2}}+\ldots+\tfrac{4k+1}{3^{b_{4k+1}}}+\tfrac{4k+2}{3^{b_{4k+2}}}\qquad\text{oraz}\qquad \tfrac{1}{3^{a_1}}+\tfrac{2}{3^{a_2}}+\ldots+\tfrac{4k+1}{3^{a_{4k+1}}}=1$$

wynosi

$$\frac{2k+1}{3^{b_{2k+1}}}+\frac{4k+2}{3^{b_{4k+2}}}-\frac{2k+1}{3^{a_{2k+1}}}=\frac{2k+1}{3^{a_{2k+1}+1}}+\frac{4k+2}{3^{a_{2k+1}+1}}-\frac{2k+1}{3^{a_{2k+1}}}=\frac{(2k+1)(1+2-3)}{3^{a_{2k+1}+1}}=0.$$

Wobec tego

$$\frac{1}{2^{b_1}}+\frac{1}{2^{b_2}}+\ldots+\frac{1}{2^{b_{4k+1}}}+\frac{1}{2^{b_{4k+2}}}=\frac{1}{3^{b_1}}+\frac{2}{3^{b_2}}+\ldots+\frac{4k+1}{3^{b_{4k+1}}}+\frac{4k+2}{3^{b_{4k+2}}}=1.$$

Dowód zdania **2.** Zdefiniujmy liczby b_1, b_2, …, b_{4k+12}, b_{4k+13} wzorem

$$b_i=\begin{cases} a_{k+2}+2 & \text{dla } i=k+2,\\ a_i+1 & \text{dla } i\in\langle 2k+2;2k+6\rangle,\\ a_{i//2}+1 & \text{dla parzystych wartości } i\in\langle 4k+4;4k+12\rangle,\\ a_{k+2}+3 & \text{dla nieparzystych wartości } i\in\langle 4k+3;4k+13\rangle,\\ a_i & \text{dla wszystkich pozostałych wartości } i\in\langle 1;4k+13\rangle. \end{cases}$$

Tak jak poprzednio wystarczy udowodnić, że liczby

$$P=\frac{1}{2^{b_1}}+\frac{1}{2^{b_2}}+\ldots+\frac{1}{2^{b_{4k+12}}}+\frac{1}{2^{b_{4k+13}}}-\frac{1}{2^{a_1}}-\frac{1}{2^{a_2}}-\ldots-\frac{1}{2^{a_{4k+1}}}-\frac{1}{2^{a_{4k+2}}}$$

oraz

$$Q=\frac{1}{3^{b_1}}+\frac{2}{3^{b_2}}+\ldots+\frac{4k+12}{3^{b_{4k+12}}}+\frac{4k+13}{3^{b_{4k+13}}}-\frac{1}{3^{a_1}}-\frac{2}{3^{a_2}}-\ldots-\frac{4k+1}{3^{a_{4k+1}}}-\frac{4k+2}{3^{a_{4k+2}}}$$

są równe zeru. Skracając dodatnie składniki powyższych wyrażeń z ujemnymi pozostawiamy tylko składniki zawierające jedną z liczb: b_{k+2}, a_{k+2}, b_i oraz a_i dla $i\in\langle 2k+2;2k+6\rangle$, a także b_i dla $i\in\langle 4k+3;4k+13\rangle$. W efekcie P jest sumą:

- liczby $\frac{1}{2^{b_{k+2}}}-\frac{1}{2^{a_{k+2}}}=\frac{1}{2^{a_{k+2}+2}}-\frac{1}{2^{a_{k+2}}}$,
- liczb $\frac{1}{2^{b_{2k+j}}}+\frac{1}{2^{b_{4k+2j}}}-\frac{1}{2^{a_{2k+j}}}=\frac{1}{2^{a_{2k+j}+1}}+\frac{1}{2^{a_{2k+j}+1}}-\frac{2}{2^{a_{2k+j}+1}}=0$ dla $j=2,3,4,5,6$ oraz
- liczb $\frac{1}{2^{b_{4k+2j+1}}}=\frac{1}{2^{a_{k+2}+3}}$ dla $j=1,2,3,4,5,6$.

Zatem

$$P=\frac{1}{2^{a_{k+2}+2}}-\frac{1}{2^{a_{k+2}}}+6\cdot\frac{1}{2^{a_{k+2}+3}}=\frac{2-8+6}{2^{a_{k+2}+3}}=0.$$

Analogicznie stwierdzamy, że Q jest sumą:

- liczby $\frac{k+2}{3^{b_{k+2}}}-\frac{k+2}{3^{a_{k+2}}}=\frac{k+2}{3^{a_{k+2}+2}}-\frac{k+2}{3^{a_{k+2}}}$,
- liczb $\frac{2k+j}{3^{b_{2k+j}}}+\frac{4k+2j}{3^{b_{4k+2j}}}-\frac{2k+j}{3^{a_{2k+j}}}=\frac{2k+j}{3^{a_{2k+j}+1}}+\frac{4k+2j}{3^{a_{2k+j}+1}}-\frac{6k+3j}{3^{a_{2k+j}+1}}=0$ dla $j=2,3,4,5,6$ oraz
- liczb $\frac{4k+2j+1}{3^{b_{4k+2j+1}}}=\frac{4k+2j+1}{3^{a_{k+2}+3}}$ dla $j=1,2,3,4,5,6$.

W konsekwencji

$$Q=\frac{k+2}{3^{a_{k+2}+2}}-\frac{k+2}{3^{a_{k+2}}}+\frac{(4k+3)+(4k+5)+\ldots+(4k+13)}{3^{a_{k+2}+3}}=\frac{(3k+6)-(27k+54)+(24k+48)}{3^{a_{k+2}+3}}=0,$$

co kończy rozwiązanie.

Odpowiedź: Szukanymi liczbami są wszystkie dodatnie liczby całkowite dające resztę 1 lub 2 z dzielenia przez 4.

VI Środkowoeuropejskie Zawody Matematyczne

Zadanie **1**. Znaleźć wszystkie takie funkcje f określone na zbiorze dodatnich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości w tym samym zbiorze, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x, y spełniona jest równość

$$f(x+f(y)) = yf(xy+1). \tag{1}$$

Rozwiązanie

Niech t będzie dowolną liczbą rzeczywistą większą od 1. Podstawiając liczby dodatnie $x = \dfrac{t-1}{t}$ i $y = t$ w równaniu (1) otrzymujemy

$$f\Big(\frac{t-1}{t} + f(t)\Big) = tf(t). \tag{2}$$

Przyjmując z kolei $x = t$ i $y = \dfrac{t-1}{t} + f(t)$ uzyskujemy

$$f\Big(t + f\Big(\frac{t-1}{t} + f(t)\Big)\Big) = \Big[\frac{t-1}{t} + f(t)\Big] f(t+tf(t)). \tag{3}$$

Na mocy związku (2) lewa strona zależności (3) jest równa czynnikowi prawej strony stojącemu po nawiasie kwadratowym. Wobec tego liczba występująca w nawiasie kwadratowym jest równa 1, skąd wynika, że

$$f(t) = \frac{1}{t} \qquad \text{dla każdego } t \geqslant 1. \tag{4}$$

Niech teraz u będzie dowolną dodatnią liczbą rzeczywistą. Z warunku (1) dla $x = 1$ i $y = u$ oraz z równości (4) dla $t = 1 + f(u)$ i $t = u + 1$ dostajemy

$$\frac{1}{1+f(u)} = f(1+f(u)) = uf(u+1) = u \cdot \frac{1}{u+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{u}}.$$

Porównując mianowniki stwierdzamy, że $f(u) = \dfrac{1}{u}$ dla każdej liczby $u > 0$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że taka funkcja f spełnia równanie (1): obie jego strony wynoszą $\dfrac{y}{xy+1}$.

Odpowiedź: Jedyną funkcją spełniającą warunki zadania jest $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Zadanie **2**. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Podzbiór S zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ nazwiemy *dopuszczalnym*, jeżeli nie zawiera on takich trzech różnych elementów a, b, c, że liczba a jest dzielnikiem liczby b, a liczba b jest dzielnikiem liczby c. Wyznaczyć, w zależności od n, największą możliwą liczbę elementów podzbioru dopuszczalnego.

Rozwiązanie

Dla każdej dodatniej liczby całkowitej x niech $f(x)$ oznacza największy nieparzysty dzielnik liczby x. Jeżeli liczby całkowite $x > y > 0$ spełniają równość $f(x) = f(y)$, to istnieją takie liczby całkowite $\alpha > \beta \geqslant 0$ oraz nieparzysta liczba z, że $x = 2^\alpha z$ oraz $y = 2^\beta z$. W efekcie liczba y jest dzielnikiem liczby x.

Niech S będzie zbiorem dopuszczalnym. $f(s)$ jest liczbą nieparzystą dla każdego $s \in S$. Ponadto ustaloną liczbę nieparzystą można uzyskać w ten sposób dla co najwyżej dwóch różnych elementów zbioru S. Gdyby bowiem istniały trzy różne elementy $a < b < c$ zbioru S związane zależnością $f(a) = f(b) = f(c)$, to na mocy spostrzeżenia uczynionego w poprzednim akapicie liczba a byłaby dzielnikiem liczby b, która z kolei byłaby dzielnikiem liczby c, wbrew warunkom zadania.

Co więcej, dla liczby nieparzystej $r > \frac{1}{2}n$ równość $f(s) = r$ może być spełniona przez co najwyżej jeden element $s \in S$, gdyż wówczas zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$ nie zawiera wielokrotności liczby r innych niż sama liczba r.

Każda liczba nieparzysta z przedziału $\langle 1; \frac{1}{2}n\rangle$ jest więc wartością $f(s)$ dla co najwyżej dwóch różnych elementów $s \in S$, a każda liczba nieparzysta z przedziału $(\frac{1}{2}n; n\rangle$ — dla co najwyżej jednego. Liczba elementów zbioru S nie przekracza zatem sumy podwojonej liczby liczb nieparzystych z przedziału $\langle 1; \frac{1}{2}n\rangle$ i liczby liczb nieparzystych z przedziału $(\frac{1}{2}n; n\rangle$.

Wykażemy, że zbiór S wszystkich liczb całkowitych z przedziału $(\frac{1}{4}n; n\rangle$ jest dopuszczalny. Jeśli $a < b < c$ i liczba a jest dzielnikiem liczby b a liczba b jest dzielnikiem liczby c, to $2a \leqslant b$ i $2b \leqslant c$, więc $4a \leqslant c$. Liczby a i c nie mogą więc jednocześnie należeć do zbioru S, gdyż iloraz jego największego i najmniejszego elementu jest mniejszy od 4. Zauważmy wreszcie, że dla rozważanego dopuszczalnego zbioru S wszystkie nierówności, o których mowa w poprzednim akapicie rozwiązania, stają się równościami. Istotnie, każda liczba nieparzysta $s \in (\frac{1}{2}n; n\rangle$ należy do zbioru S, czyli pojawia się jako wartość $f(s)$. Podobnie dla każdej liczby nieparzystej $t \in \langle 1; \frac{1}{2}n\rangle$ istnieje dokładnie jedna taka para kolejnych nieujemnych liczb całkowitych k i $k+1$, że $\frac{1}{4}n < 2^k t < 2^{k+1}t \leqslant n$. Wówczas liczby $2^k t$ i $2^{k+1}t$ są elementami zbioru S oraz $f(2^k t) = f(2^{k+1}t) = t$.

W konsekwencji zbiór wszystkich liczb całkowitych z przedziału $(\frac{1}{4}n; n\rangle$ jest zbiorem dopuszczalnym o największej możliwej liczbie elementów.

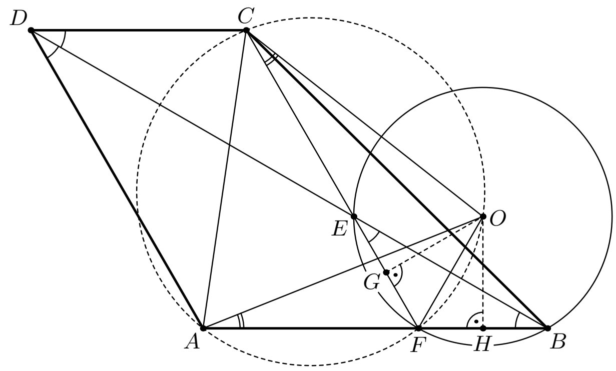
Odpowiedź: Największą możliwą liczbą elementów zbioru dopuszczalnego jest najmniejsza liczba całkowita z półprostej $\left\langle \frac{3}{4}n, \infty\right)$.

Zadanie **3**. Dany jest trapez $ABCD$ o dłuższej podstawie AB i krótszej podstawie CD. Prosta BD jest dwusieczną kąta ADC. Prosta równoległa do prostej AD przechodząca przez punkt C przecina odcinki BD i AB odpowiednio w punktach E i F. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BEF. Udowodnić, że jeżeli $\sphericalangle ACO = 60°$, to

$$CF = AF + FO.$$

Rozwiązanie

Korzystając z równoległości prostych AB i CD, równoległości prostych AD i CF



Rysunek 28

oraz równości miar kątów ADB i BDC (rys. 28) otrzymujemy

$$\sphericalangle FBE = \sphericalangle ABD = \sphericalangle BDC = \sphericalangle ADB = \sphericalangle FEB.$$

Trójkąty EFB i DAB są zatem równoramienne ($EF = FB$ i $DA = AB$), więc

$$CF = DA = AB = AF + FB.$$

Do zakończenia rozwiązania pozostaje jeszcze uzasadnić, że $FB = FO$.

Oznaczmy przez G i H odpowiednio środki odcinków EF i FB. Punkty te są rzutami prostokątnymi środka O okręgu opisanego na trójkącie BEF na cięciwy o jednakowych długościach. W takim razie $OG = OH$ oraz

$$CG = CF - GF = CF - \tfrac{1}{2}EF = AB - \tfrac{1}{2}FB = AB - HB = AH,$$

czyli trójkąty prostokątne CGO i AHO są przystające. Wynika stąd zależność $\sphericalangle FAO = \sphericalangle FCO$, która dowodzi, że na czworokącie $AFOC$ można opisać okrąg. W konsekwencji $\sphericalangle BFO = 180° - \sphericalangle AFO = \sphericalangle ACO = 60°$, a więc trójkąt równoramienny OFB jest równoboczny, co daje żądany związek $FB = FO$.

Zadanie **4**. Ciąg a_0, a_1, a_2, ... jest określony wzorami: $a_0 = 2$, $a_1 = 4$ oraz

$$(1) \qquad a_{n+1} = \tfrac{1}{2}a_n a_{n-1} + a_n + a_{n-1} \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których istnieje taka liczba całkowita $m \geqslant 1$, że liczba $a_m - 1$ jest podzielna przez p.

Rozwiązanie

Liczby a_0 i a_1 są parzyste. Jeżeli dla pewnego $n \geqslant 1$ liczby a_{n-1} i a_n są parzyste, to wszystkie trzy składniki prawej strony równości (1) są parzyste i w efekcie także liczba a_{n+1} jest parzysta. Stąd przez indukcję wnioskujemy, że wszystkie wyrazy danego w treści zadania ciągu są liczbami parzystymi. Wobec tego liczba $p = 2$ nie ma żądanej własności. Ma ją natomiast liczba $p = 3$, gdyż $a_1 - 1 = 3$.

Wykażemy, że dowolna liczba pierwsza $p \geqslant 5$ spełnia warunki zadania.

Określmy ciąg b_0, b_1, b_2, ... wzorem

$$b_n = \tfrac{1}{2}a_n + 1 \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Wówczas $b_0 = 2$ oraz $b_1 = 3$, a na mocy zależności (1) otrzymujemy

$$b_{n+1} = \tfrac{1}{2}a_{n+1} + 1 = \tfrac{1}{4}a_n a_{n-1} + \tfrac{1}{2}a_n + \tfrac{1}{2}a_{n-1} + 1 = (\tfrac{1}{2}a_n + 1)(\tfrac{1}{2}a_{n-1} + 1) = b_n b_{n-1}$$

dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$. Stosując indukcję stwierdzamy, że wszystkie wyrazy ciągu b_0, b_1, b_2, ... są liczbami postaci $2^x \cdot 3^y$ dla pewnych nieujemnych całkowitych wykładników x i y, czyli wyrazy te nie są podzielne przez p.

Przypiszemy każdej liczbie całkowitej $t \geqslant 0$ parę (r_t, r_{t+1}), gdzie liczba r_n jest resztą z dzielenia wyrazu b_n przez p dla $n = 0, 1, 2, \ldots$. Zbiór takich par jest skończony, więc pewnym dwóm różnym nieujemnym liczbom całkowitym przypisano tę samą parę. Niech k będzie najmniejszą taką dodatnią liczbą całkowitą, że para (r_k, r_{k+1}) została przyporządkowana pewnej nieujemnej liczbie całkowitej ℓ mniejszej od k. Zatem $r_k = r_\ell$ oraz $r_{k+1} = r_{\ell+1}$, co oznacza, że różnice $b_k - b_\ell$ i $b_{k+1} - b_{\ell+1}$ są podzielne przez p. Gdyby $\ell > 0$, to drugi składnik po prawej stronie równości

$$b_{k+1} - b_{\ell+1} = b_k b_{k-1} - b_\ell b_{\ell-1} = (b_k - b_\ell)b_{k-1} + b_\ell(b_{k-1} - b_{\ell-1})$$

byłby podzielny przez p. W konsekwencji liczby b_{k-1} i $b_{\ell-1}$ dawałyby te same reszty z dzielenia przez p, skąd $r_{k-1} = r_{\ell-1}$. Jednak wtedy liczbom $k-1$ oraz $\ell-1$ byłaby przypisana ta sama para (r_{k-1}, r_k), wbrew określeniu liczby k. W rezultacie $\ell = 0$, czyli $r_k = r_0 = 2$ oraz $r_{k+1} = r_1 = 3$. Liczby $b_k - 2$ i $b_{k+1} - 3$ są więc podzielne przez p, co prowadzi do przedstawienia

$$a_{k-1} - 1 = 2b_{k-1} - 3 = 2 \cdot \frac{b_{k+1}}{b_k} - 3 = \frac{2b_{k+1} - 3b_k}{b_k} = \frac{2(b_{k+1} - 3) - 3(b_k - 2)}{b_k},$$

w którym ułamek stojący po prawej stronie ma licznik podzielny przez p i mianownik niepodzielny przez p. Stąd liczba $a_{k-1} - 1$ jest podzielna przez p, co dowodzi stwierdzenia sformułowanego w drugim akapicie rozwiązania.

Odpowiedź: Szukanymi liczbami są wszystkie nieparzyste liczby pierwsze.

Zadanie **5**. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$(1) \qquad \begin{cases} 2x^3 + 1 = 3zx, \\ 2y^3 + 1 = 3xy, \\ 2z^3 + 1 = 3yz. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Żadna ze zmiennych x, y, z nie może być równa zeru — w przeciwnym razie równanie układu (1) zawierające tę zmienną po lewej stronie przyjęłoby postać $1 = 0$. Niech z kolei jedna z niewiadomych będzie dodatnia; przypuśćmy dla ustalenia uwagi, że $x > 0$. Wówczas na mocy pierwszego równania układu liczba $3xz$ jest dodatnia, zatem $z > 0$. Z trzeciego równania wynika teraz, że $3yz > 0$, zatem $y > 0$. Wobec tego wszystkie liczb x, y, z są dodatnie albo wszystkie są ujemne.

Przypadek **1.** Liczby x, y, z są dodatnie. Mnożąc stronami trzy równania układu (1) otrzymujemy zależność

$$(2) \qquad (2x^3 + 1)(2y^3 + 1)(2z^3 + 1) = 3x^2 \cdot 3y^2 \cdot 3z^2.$$

Z drugiej strony, wielomian $W(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1 = (2t + 1)(t - 1)^2$ przybiera nieujemne wartości dla $t \geqslant -\frac{1}{2}$ i ma jeden dodatni pierwiastek $t = 1$. Stąd dla każdej liczby rzeczywistej $t > 0$ prawdziwa jest nierówność $2t^3+1 \geqslant 3t^2$, która staje się równością jedynie dla $t = 1$. Łącząc ten fakt zastosowany dla $t = x$, $t = y$ i $t = z$ ze związkiem (2) stwierdzamy, że $x = y = z = 1$.

Przypadek **2.** Liczby x, y, z są ujemne. Nie tracąc ogólności rozumowania załóżmy, że x jest największą z tych trzech liczb (lub jedną z największych). Wtedy korzystając z pierwszego i trzeciego równania układu (1) uzyskujemy

$$3zx = 2x^3 + 1 \geqslant 2z^3 + 1 = 3yz$$

i dzieląc stronami przez liczbę ujemną $3z$ dostajemy $x \leqslant y$. To wraz z określeniem liczby x (jako największej) dowodzi, że $x = y$. Lewe strony pierwszego i drugiego równania układu są więc równe, skąd $3zx = 3xy$ i $y = z$. Oznaczając przez t wspólną ujemną wartość liczb x, y, z widzimy, że dany układ sprowadza się do jednego równania $W(t) = 0$, co daje $x = y = z = -\frac{1}{2}$.

Na koniec sprawdzamy, że obie otrzymane trójki spełniają układ (1).

Odpowiedź: Dany układ równań ma dwa rozwiązania (x, y, z):

$$(1, 1, 1) \quad \text{oraz} \quad (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}).$$

Zadanie **6**. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek $abc = 1$. Udowodnić, że

$$\sqrt{9+16a^2} + \sqrt{9+16b^2} + \sqrt{9+16c^2} \geqslant 3 + 4(a+b+c).$$

Rozwiązanie

Określmy dodatnie liczby rzeczywiste x, y, z wzorami

$$x = \sqrt{9+16a^2} - 4a, \quad y = \sqrt{9+16b^2} - 4b, \quad z = \sqrt{9+16c^2} - 4c.$$

Wówczas teza zadania przybiera postać nierówności

$$x + y + z \geqslant 3. \tag{1}$$

Obliczamy:

$$9 - x^2 = 9 - (9 + 16a^2 - 8a\sqrt{9+16a^2} + 16a^2) = 8a\sqrt{9a+16a^2} - 32a^2 = 8ax.$$

Stąd i z dwóch analogicznych zależności otrzymujemy związki

$$a = \frac{9-x^2}{8x}, \quad b = \frac{9-y^2}{8y}, \quad c = \frac{9-z^2}{8z}.$$

Wobec tego liczby x, y, z są mniejsze od 3. Ponadto dany w treści zadania warunek $abc = 1$ możemy przepisać w postaci

$$(9-x^2)(9-y^2)(9-z^2) = 512xyz. \tag{2}$$

Z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną uzyskujemy

$$\begin{aligned}(3+x)(3+y)(3+z) &= (1+1+1+x)(1+1+1+y)(1+1+1+z) \geqslant \\ &\geqslant 4\sqrt[4]{x}\cdot 4\sqrt[4]{y}\cdot 4\sqrt[4]{z} = 64\sqrt[4]{xyz}.\end{aligned} \tag{3}$$

Dzieląc obustronnie równość (2) przez nierówność (3) stwierdzamy, że

$$(3-x)(3-y)(3-z) \leqslant 8\sqrt[4]{(xyz)^3}. \tag{4}$$

Pozostaje jeszcze wykazać, że z zależności (4) wynika zależność (1).

Przypuśćmy w tym celu, że $x+y+z < 3$. Stosując ponownie nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną dostajemy związki

$$\sqrt[3]{xyz} \leqslant \tfrac{1}{3}(x+y+z) < 1 \quad \text{oraz} \quad xy + yz + zx \geqslant 3\sqrt[3]{xy\cdot yz\cdot zx} = 3\sqrt[3]{(xyz)^2}.$$

W szczególności otrzymujemy $xyz < 1$, skąd $\sqrt[3]{(xyz)^2} > \sqrt[4]{(xyz)^3} > xyz$. Zatem

$$\begin{aligned}(3-x)(3-y)(3-z) &= 9(3-x-y-z) + 3(xy+yz+zx) - xyz > \\ &> 9\sqrt[3]{(xyz)^2} - xyz > 9\sqrt[4]{(xyz)^3} - \sqrt[4]{(xyz)^3} = 8\sqrt[4]{(xyz)^3},\end{aligned}$$

wbrew nierówności (4). Wobec tego $x+y+z \geqslant 3$, co kończy rozwiązanie.

Zadanie **7**. Dla danej dodatniej liczby całkowitej n rozważamy wszystkie ciągi n-wyrazowe o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2\}$. Blokiem xy w takim ciągu nazwiemy parę sąsiednich wyrazów równych kolejno x oraz y.

Niech a oznacza liczbę takich ciągów o parzystej liczbie bloków 01 i parzystej liczbie bloków 02. (Zero jest liczbą parzystą).

Niech b oznacza liczbę takich ciągów o nieparzystej liczbie bloków 01 i nieparzystej liczbie bloków 02.

Dowieść, że $a > b$.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez A zbiór ciągów o parzystej liczbie bloków 01 i parzystej liczbie bloków 02, a przez B — zbiór ciągów o nieparzystej liczbie bloków 01 i nieparzystej liczbie bloków 02. Aby wykazać, że zbiór A ma więcej elementów niż zbiór B, określimy funkcję różnowartościową ze zbioru B w zbiór A oraz podamy przykład ciągu ze zbioru A, który nie jest wartością tej funkcji.

W tym celu weźmy pod uwagę dowolny ciąg b ze zbioru B. Z określenia zbioru B wynika, że w ciągu b istnieje co najmniej jeden blok 01 i co najmniej jeden blok 02. Wśród wszystkich bloków 01 i 02 w ciągu b wybierzmy blok występujący w tym ciągu najwcześniej. Następnie zamieńmy wybrany blok na blok drugiego typu: jeżeli wybraliśmy blok 01, to zamieniamy go na blok 02, jeżeli zaś wybraliśmy blok 02, to zamieniamy go na blok 01. Otrzymany n-wyrazowy ciąg a ma albo o jeden blok 01 więcej i jeden blok 02 mniej niż ciąg b, albo też o jeden blok 01 mniej i jeden blok 02 więcej niż ciąg b. W obu przypadkach ciąg a ma parzystą liczbę bloków 01 i parzystą liczbę bloków 02, a więc należy do zbioru A. Zatem ciągowi b możemy przypisać ciąg a.

Jeżeli ciąg a ze zbioru A został przypisany w powyższy sposób ciągowi b ze zbioru B, to w ciągu a istnieje co najmniej jeden blok 01 lub co najmniej jeden blok 02. Jest to mianowicie blok, który wybrano do zamiany na blok drugiego typu. Wówczas można odtworzyć ciąg b wybierając najwcześniejszy blok 01 lub 02 w ciągu a i ponownie zamieniając go na blok drugiego typu. Stąd wniosek, że rozpatrywane przyporządkowanie jest różnowartościowe.

Każdy ciąg bez żadnych bloków 01 i żadnych bloków 02 — na przykład ciąg o wszystkich wyrazach równych 0 — należy do zbioru A. Ponadto w myśl pierwszego zdania poprzedniego akapitu dowolny taki ciąg nie mógł zostać przypisany żadnemu ciągowi ze zbioru B. To kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie **8**. Dana jest liczba pierwsza $p > 2$. Dla permutacji $a = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ ciągu $c = (1, 2, \ldots, p)$ niech $f(a)$ oznacza liczbę tych spośród liczb

$$a_1, \quad a_1 + a_2, \quad a_1 + a_2 + a_3, \quad \ldots, \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_p,$$

które są podzielne przez p. Znaleźć średnią arytmetyczną liczb $f(a)$ dla wszystkich $p!$ permutacji ciągu c.

Rozwiązanie

Przesunięciem permutacji $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ ciągu c nazywać będziemy permutację $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_p)$ ciągu c określoną wzorem

$$a'_i = \begin{cases} a_i + 1, & \text{gdy } a_i < p, \\ 1, & \text{gdy } a_i = p \qquad \text{dla i=1,2,\ldots,p.} \end{cases}$$

Dla dowolnej permutacji ciągu c w wyniku p-krotnego wykonania operacji przesunięcia otrzymujemy najpierw $p - 1$ innych permutacji, a na koniec — permutację, od której rozpoczęliśmy. W ten sposób dostajemy *grupę* złożoną z p różnych permutacji. Każdą z nich można uzyskać z dowolnej innej permutacji tej grupy stosując wielokrotnie przesunięcie. Dwie takie grupy, powstające z różnych permutacji początkowych, pokrywają się albo nie mają żadnych permutacji wspólnych.

Niech $b = (b_1, b_2, \ldots, b_p)$ będzie dowolną permutacją ciągu c. Oznaczmy przez $b^{(i)}$ dla $i = 0, 1, 2, \ldots, p - 1$ permutację otrzymaną w wyniku i-krotnego przesunięcia permutacji b; permutacja $b^{(i)}$ ma postać

$$(m(b_1 + i), m(b_2 + i), \ldots, m(b_p + i)), \qquad \text{gdzie } m(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \leqslant p, \\ x - p & \text{dla } x > p. \end{cases}$$

Wówczas grupa zawierająca permutację b ma postać $\{b^{(0)}, b^{(1)}, \ldots, b^{(p-1)}\}$. Ponadto suma $f(b^{(0)}) + f(b^{(1)}) + \ldots + f(b^{(p-1)})$ jest liczbą par wskaźników $i \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ oraz $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$, dla których liczba

$$m(b_1 + i) + m(b_2 + i) + \ldots + m(b_j + i)$$

jest podzielna przez p, czyli dla których liczba

$$k_{i,j} = (b_1 + i) + (b_2 + i) + \ldots + (b_j + i) = b_1 + b_2 + \ldots + b_j + ji$$

jest podzielna przez p. Z równości $b_1 + b_2 + \ldots + b_p = 1 + 2 + \ldots + p = \frac{1}{2}p(p + 1)$ wynika, że liczba $k_{i,p}$ jest podzielna przez p dla każdej spośród p możliwych wartości $i \in \{0, 1, 2, \ldots, p - 1\}$. Ustalmy z kolei wskaźnik $j \in \{1, 2, \ldots, p - 1\}$. Wtedy liczby $k_{0,j}$, $k_{1,j}$, $\ldots$, $k_{p-1,j}$ dają różne reszty z dzielenia przez p, gdyż dla różnych wartości $i, i' \in \{0, 1, 2, \ldots, p - 1\}$ różnica

$$k_{i,j} - k_{i',j} = ji - ji' = j(i - i')$$

nie jest podzielna przez liczbę pierwszą p jako iloczyn dwóch czynników niepodzielnych przez p. To dowodzi, że dokładnie jedna z wypisanych p liczb jest podzielna przez p. Otrzymujemy stąd związek

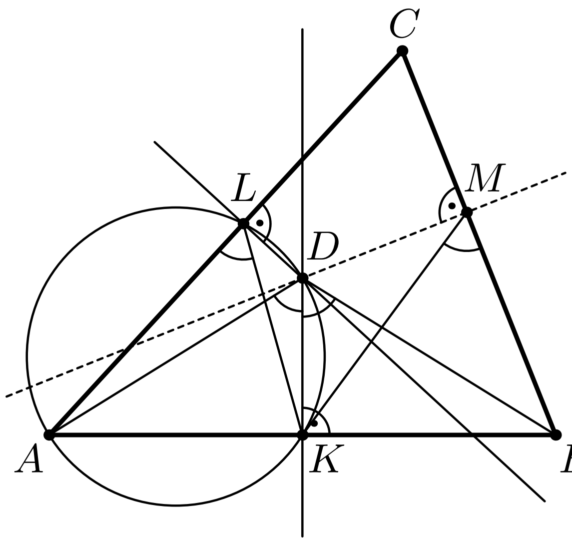
$$f(b^{(0)}) + f(b^{(1)}) + \ldots + f(b^{(p-1)}) = p + (p-1) = 2p - 1.$$

Wobec tego wszystkie permutacje ciągu c można podzielić na $(p-1)!$ grup złożonych z p permutacji, a suma liczb $f(a)$ dla permutacji a należących do jednej grupy jest równa $2p-1$. Zatem szukana średnia arytmetyczna wynosi

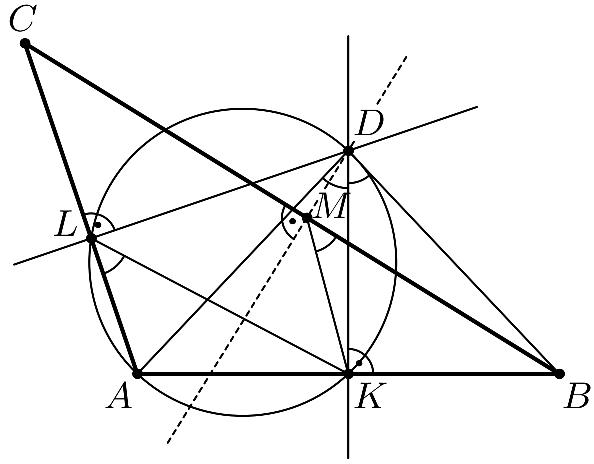
$$\frac{(p-1)! \cdot (2p-1)}{p!} = \frac{\mathbf{2p-1}}{\mathbf{p}}.$$

Zadanie **9**. W trójkącie ABC punkt K jest środkiem boku AB, a punkty L i M leżą odpowiednio na bokach AC i BC, przy czym $\sphericalangle CLK = \sphericalangle KMC$. Udowodnić, że proste prostopadłe do boków AB, AC i BC, przechodzące odpowiednio przez punkty K, L i M, przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

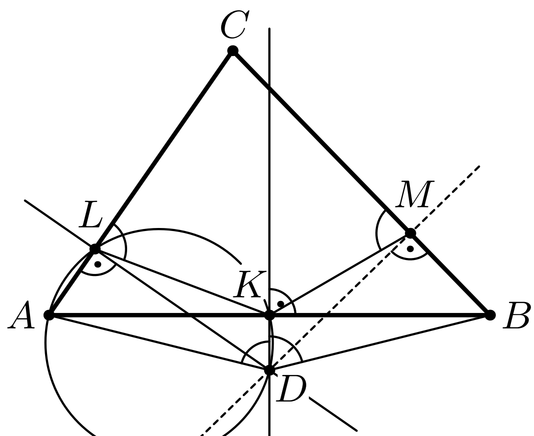


Rysunek 29



Rysunek 30

Niech proste prostopadłe do boków AB i AC, przechodzące odpowiednio przez punkty K i L, przecinają się w punkcie D. W zależności od tego, czy kąt CLK jest rozwarty, prosty, czy ostry, punkt D leży odpowiednio po tej samej stronie prostej AB co punkt C (rys. 29 i 30), pokrywa się z punktem K, albo też leży po przeciwnej stronie prostej AB niż punkt C (rys. 31). Przyjmijmy, że punkty D i K są różne. Na mocy określenia punktu D punkty A, K, L i D leżą na okręgu o średnicy AD. Zatem



Rysunek 31

$$\sphericalangle ADK = \sphericalangle ALK = 180^\circ - \sphericalangle CLK,$$

jeżeli kąt CLK jest rozwarty, albo

$$\sphericalangle ADK = 180^\circ - \sphericalangle ALK = \sphericalangle CLK,$$

jeżeli kąt CLK jest ostry.

Analogicznie niech proste prostopadłe do boków AB i BC, przechodzące odpowiednio przez punkty K i M, przecinają się w punkcie E. Gdy kąt KMC jest rozwarty, prosty, albo ostry, punkt E leży odpowiednio po tej samej stronie prostej AB co punkt C, pokrywa się z punktem K, albo też leży po przeciwnej stronie prostej AB niż punkt C. To dowodzi, że punkty D i E pokrywają się z punktem K albo leżą po jednej stronie prostej AB.

Ponadto jeżeli $E \neq K$, to punkty B, K, M i E leżą na okręgu o średnicy BE oraz $\sphericalangle BEK = 180° - \sphericalangle KMC$, gdy kąt KMC jest rozwarty, albo $\sphericalangle BEK = \sphericalangle KMC$, gdy kąt KMC jest ostry. Wobec tego korzystając z danego w treści zadania związku $\sphericalangle CLK = \sphericalangle KMC$ otrzymujemy równość

$$\sphericalangle ADK = \sphericalangle BEK,$$

która oznacza, że trójkąty prostokątne AKD i BKE są podobne. Co więcej, ich przyprostokątne AK i BK mają jednakowe długości. W konsekwencji trójkąty te są przystające; stąd i z ostatniego zdania poprzedniego akapitu wynika, że punkty D i E zawsze się pokrywają. A to jest właśnie teza zadania.

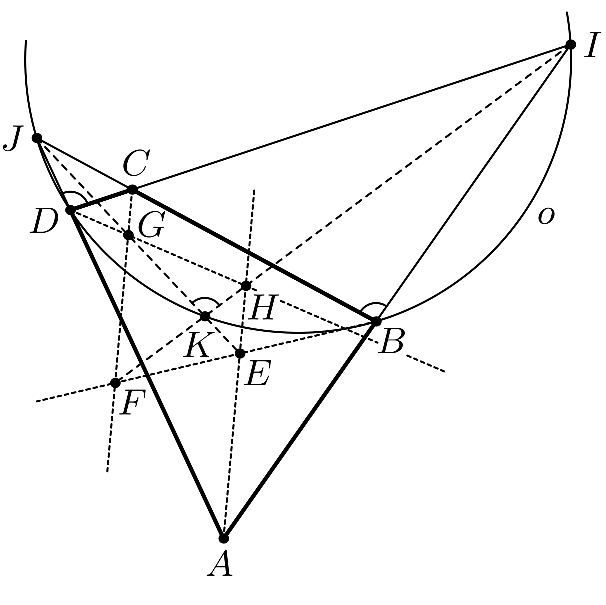
Zadanie **10**. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, nie mający pary równoległych boków, w którym $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA$. Przypuśćmy, że punkty przecięcia par sąsiednich dwusiecznych kątów wewnętrznych czworokąta $ABCD$ są wierzchołkami czworokąta wypukłego, którego przekątne przecinają się w punkcie K. Wykazać, że punkt przecięcia prostych AB i CD leży na okręgu opisanym na trójkącie BKD.

Rozwiązanie

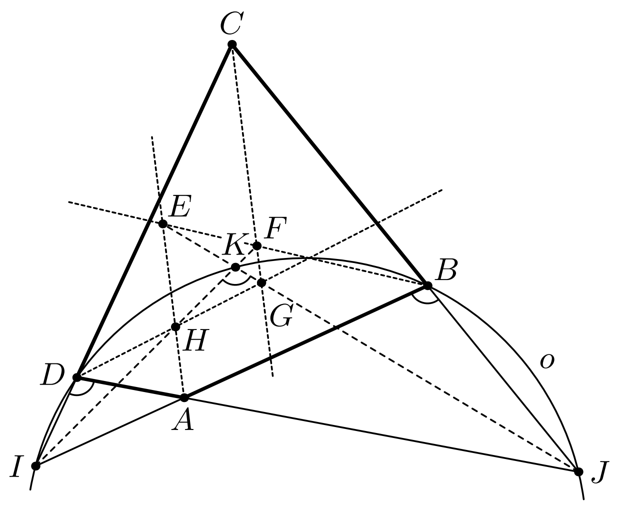
Niech proste AB i CD przecinają się w punkcie I, a proste BC i DA — w punkcie J. Na mocy założeń zadania możliwe są dwie różne konfiguracje stron boków czworokąta $ABCD$, po których leżą punkty I i J, w zależności od tego, czy kąt $\sphericalangle CDA + \sphericalangle DAB = \sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC$ jest mniejszy (rys. 32), czy też większy od $180°$ (rys. 33). W obu przypadkach równość $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA$ dowodzi, że punkty B, D, I, J leżą na jednym okręgu o.

Oznaczmy ponadto przez E, F, G, H punkty przecięcia par sąsiednich dwusiecznych kątów wewnętrznych czworokąta $ABCD$ tak jak na rys. 32 i 33.

Punkt F leży na dwusiecznych kątów wewnętrznych czworokąta $ABCD$ przy wierzchołkach B i C, więc jest on jednakowo odległy od prostych AB, BC i CD. Analogicznie uzasadniamy, że punkt H jest jednakowo odległy od prostych AB i CD. Zatem punkty F i H — a w ślad za tym również punkt K — leżą na dwusiecznej kąta AID. Podobnie stwierdzamy, że punkt K leży na dwusiecznej kąta AJB.



Rysunek 32



Rysunek 33

Rozpatrzmy teraz czworokąty wklęsłe $IAJK$ oraz $IKJC$. Mają one równe miary kątów wewnętrznych przy wierzchołku I oraz równe miary kątów wewnętrznych przy wierzchołku J. W efekcie suma miar kątów wewnętrznych czworokąta $IAJK$ przy wierzchołkach A i K jest taka sama, jak suma miar kątów wewnętrznych czworokąta

$IKJC$ przy wierzchołkach K i C. Zależność tę dla konfiguracji przedstawionej na rys. 32 możemy zapisać w postaci

$$\sphericalangle DAB + (360^\circ - \sphericalangle IKJ) = \sphericalangle IKJ + (360^\circ - \sphericalangle BCD),$$

a w sytuacji zaprezentowanej na rys. 33 otrzymujemy

$$(360^\circ - \sphericalangle DAB) + \sphericalangle IKJ = (360^\circ - \sphericalangle IKJ) + \sphericalangle BCD.$$

W obu przypadkach uzyskujemy związek

$$\sphericalangle IKJ = \tfrac{1}{2}(\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD) = \tfrac{1}{2}(360^\circ - 2\sphericalangle ABC) = 180^\circ - \sphericalangle ABC = \sphericalangle IBJ,$$

z którego wynika, że punkt K leży na okręgu o. To zaś dowodzi żądanej tezy.

Zadanie **11**. Rozwiązać w dodatnich liczbach całkowitych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x^y + y^x = z^y, \\ x^y + 2012 = y^{z+1}. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że liczba x jest nieparzysta. Wtedy z drugiego równania układu wynika, że liczba y również jest nieparzysta, a następnie z pierwszego równania — że liczba z jest parzysta. Ponadto drugie równanie pociąga za sobą nierówność $y > 1$, skąd prawa strona pierwszego równania jest podzielna przez 4. Zatem liczby $x^y + y^x$ oraz $x^y + 2012 + y^x = y^{z+1} + y^x$ są podzielne przez 4, czyli liczby nieparzyste y^{z+1} i y^x dają różne reszty z dzielenia przez 4. Jednak wykładniki $z+1$ i x są nieparzyste, a więc potęgi y^{z+1} i y^x dają przy dzieleniu przez 4 tę samą resztę, co liczba y. Rzeczywiście, dla nieparzystego wykładnika $n = 2k+1$ różnica $y^n - y = y(y^k - 1)(y^k + 1)$ jest podzielna przez 4 jako iloczyn o dwóch parzystych czynnikach. Otrzymaliśmy sprzeczność.

Wobec tego x jest liczbą parzystą. Na mocy kolejno drugiego i pierwszego równania danego układu także liczby y i z są parzyste. Gdyby $y > 2$ lub gdyby liczba x była podzielna przez 4, to drugie równanie układu nie mogłoby być spełnione, gdyż liczby x^y i y^{z+1} byłyby podzielne przez 8, a liczba 2012 nie jest podzielna przez 8. W efekcie $y = 2$, a liczba x nie jest podzielna przez 4.

Z pierwszego równania układu uzyskujemy teraz rozkład

$$2^x = y^x = z^y - x^y = z^2 - x^2 = (z - x)(z + x).$$

Czynniki prawej strony są potęgami dwójki różniącymi się o liczbę $2x$ podzielną przez 4, ale nie przez 8. Zatem mniejszy z tych czynników jest równy 4. Związek $z - x = 4$ sprowadza pierwsze równanie do postaci $x^2 + 2^x = (x + 4)^2$, czyli $2^x = 8x + 16$. Podstawiając wartości $x = 2$ oraz $x = 6$ stwierdzamy, że tylko dla tej drugiej równanie jest spełnione i wtedy $z = 10$. Innych rozwiązań nie ma ze względu na nierówność $2^t > 8t + 16$ prawdziwą dla $t \geqslant 7$. Jej dowód przebiega indukcyjnie: obliczamy, że $2^7 = 128 > 72 = 8 \cdot 7 + 16$, a jeżeli $2^t > 8t + 16$ dla pewnego $t \geqslant 7$, to $2^{t+1} = 2^t + 2^t > 2^t + 8 > (8t + 16) + 8 = 8(t + 1) + 16$.

Pozostaje bezpośrednio sprawdzić, że liczby $x = 6$, $y = 2$ i $z = 10$ istotnie spełniają dany w treści zadania układ równań.

Odpowiedź: Dany układ ma jedno rozwiązanie: $(x, y, z) = (6, 2, 10)$.

Zadanie **12**. Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n niech $d(n)$ oznacza liczbę wszystkich dodatnich dzielników liczby n. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a i b, że

$$d(a) = d(b), \qquad d(a^2) = d(b^2) \qquad \text{oraz} \qquad d(a^3) \neq d(b^3).$$

Rozwiązanie

Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą o rozkładzie na czynniki pierwsze postaci $n = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{s_k}$. Każdy dodatni dzielnik liczby n można zapisać jako iloczyn $p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{t_k}$. Wykładniki t_1, t_2, ..., t_k to liczby całkowite spełniające nierówności $0 \leqslant t_i \leqslant s_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Wykładnik t_i można wybrać na $s_i + 1$ sposobów, więc

$$d(n) = (s_1 + 1)(s_2 + 1) \ldots (s_k + 1).$$

Z równości $n^2 = p_1^{2s_1} \cdot p_2^{2s_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{2s_k}$ i $n^3 = p_1^{3s_1} \cdot p_2^{3s_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{3s_k}$ wynika, że

$$d(n^2) = (2s_1 + 1)(2s_2 + 1) \ldots (2s_k + 1) \quad \text{i} \quad d(n^3) = (3s_1 + 1)(3s_2 + 1) \ldots (3s_k + 1).$$

Znajdziemy liczby całkowite x, y, z, t większe od 1, dla których liczby

$$a = 2^{xy-1} \cdot 3^{z-1} \cdot 5^{t-1} \qquad \text{oraz} \qquad b = 2^{x-1} \cdot 3^{y-1} \cdot 5^{zt-1}$$

mają własności postulowane w treści zadania.

Bez trudu stwierdzamy, że $d(a) = xyzt = d(b)$. Warunek $d(a^2) = d(b^2)$ przekształcamy równoważnie następująco:

$$\begin{aligned}
(2xy-1)(2z-1)(2t-1) &= (2x-1)(2y-1)(2zt-1), \\
(2xy-1)[2(2zt-1) - (2z+2t-3)] &= (2zt-1)[2(2xy-1) - (2x+2y-3)], \\
(2xy-1)(2z+2t-3) &= (2zt-1)(2x+2y-3).
\end{aligned}$$

Wystarczy dobrać wartości x, y, z, t i pewną dodatnią liczbę całkowitą m tak, by

$$2xy - 1 = m(2x + 2y - 3) \qquad \text{oraz} \qquad 2zt - 1 = m(2z + 2t - 3),$$

czyli dla których

$$2(x - m)(y - m) = 2(z - m)(t - m) = 2m^2 - 3m + 1.$$

Dla $m = 5$ liczba $2m^2 - 3m + 1 = 36$ jest dwukrotnością liczby złożonej. Ponadto równości

$$(x - 5)(y - 5) = (z - 5)(t - 5) = 18$$

są spełnione na przykład dla $x - 5 = 1$, $y - 5 = 18$, $z - 5 = 2$, $t - 5 = 9$, a więc dla czwórki $(x, y, z, t) = (6, 23, 7, 14)$. Do zakończenia rozwiązania pozostaje wykazać zależność $d(a^3) \neq d(b^3)$ dla tej czwórki. W tym celu obliczamy, że

$$\begin{aligned}
d(a^3) &= (3xy - 2)(3z - 2)(3t - 2) = 412 \cdot 19 \cdot 40, \\
d(b^3) &= (3x - 2)(3y - 2)(3zt - 2) = 16 \cdot 67 \cdot 292.
\end{aligned}$$

Zatem liczba $d(a^3)$ jest podzielna przez 5, a liczba $d(b^3)$ — nie.

Odpowiedź: Takie liczby a i b istnieją.

V Międzynarodowe Mistrzostwa Rumunii w Matematyce

Zadanie **1**. Dana jest skończona liczba chłopców i dziewczyn. *Dobrym zbiorem chłopców* nazwiemy taki zbiór chłopców, że każda dziewczyna zna przynajmniej jednego chłopca z tego zbioru; *dobrym zbiorem dziewczyn* nazwiemy taki zbiór dziewczyn, że każdy chłopiec zna przynajmniej jedną dziewczynę z tego zbioru. Udowodnić, że liczba dobrych zbiorów chłopców i liczba dobrych zbiorów dziewczyn mają tę samą parzystość.

(*Uwaga:* Zakładamy, że jeśli osoba A zna osobę B, to osoba B zna osobę A.)

Rozwiązanie

Nazwijmy *parą rozłączną* parę (X,Y), w której X jest zbiorem chłopców, Y jest zbiorem dziewczyn oraz żaden chłopiec ze zbioru X nie zna żadnej dziewczyny ze zbioru Y. Każdy ze zbiorów X i Y może być pusty; para, w której co najmniej jeden ze zbiorów jest pusty, jest oczywiście parą rozłączną.

Wykażemy, że liczba dobrych zbiorów chłopców ma tę samą parzystość co liczba par rozłącznych. W tym celu wystarczy uzasadnić, że X jest dobrym zbiorem chłopców wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje nieparzysta liczba zbiorów dziewczyn Y, dla których para (X,Y) jest rozłączna.

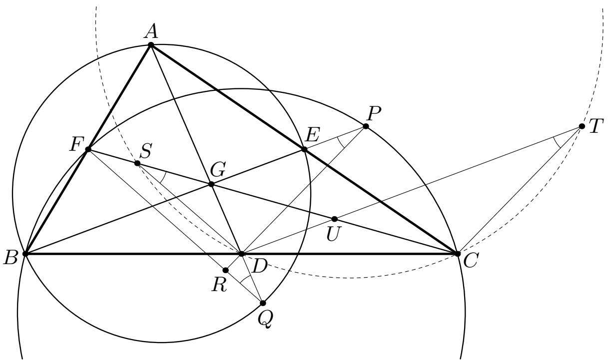
Jeżeli X jest dobrym zbiorem chłopców, to każda dziewczyna zna przynajmniej jednego chłopca z tego zbioru. W konsekwencji jedynym zbiorem dziewczyn Y, dla którego para (X,Y) jest rozłączna, jest zbiór pusty. Liczba zbiorów Y o tej własności jest więc nieparzysta. Przyjmijmy z kolei, że zbiór chłopców X nie jest dobry oraz niech y_1, y_2, …, y_n będą wszystkimi dziewczynami, które nie znają żadnego chłopca ze zbioru X. Wówczas dla dowolnego zbioru dziewczyn Y para (X,Y) jest rozłączna wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór ten jest podzbiorem zbioru $\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$. Liczba tych podzbiorów wynosi zaś 2^n i w myśl nierówności $n \geqslant 1$ jest liczbą parzystą. Wynika stąd stwierdzenie sformułowane w ostatnim zdaniu poprzedniego akapitu.

Podobnie dowodzimy, że Y jest dobrym zbiorem dziewczyn wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje nieparzysta liczba zbiorów chłopców X, dla których para (X,Y) jest rozłączna. Zatem również liczba dobrych zbiorów dziewczyn ma tę samą parzystość co liczba par rozłącznych, a to pociąga za sobą tezę zadania.

Zadanie **2**. W trójkącie różnobocznym ABC punkty D, E i F są odpowiednio środkami boków BC, CA i AB. Okrąg opisany na trójkącie BCF przecina prostą BE w punkcie P różnym od B, a okrąg opisany na trójkącie ABE przecina prostą AD w punkcie Q różnym od A. Proste DP i FQ przecinają się w punkcie R. Wykazać, że środek ciężkości G trójkąta ABC leży na okręgu opisanym na trójkącie PQR.

Rozwiązanie

Odcinek BE jest cięciwą okręgu opisanego na trójkącie ABE, a więc punkt G znajduje się wewnątrz tego okręgu. Wobec tego punkt P leży na półprostej $GE^{\to}$ i analogicznie punkt Q leży na półprostej $GD^{\to}$ (rys. 34). Zauważmy też, że punkt R nie leży na prostej AD. W przeciwnym razie mielibyśmy bowiem $R = Q = D$, czyli w trapez $ABDE$ można by wpisać okrąg i w efekcie $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC$, wbrew temu, że trójkąt ABC jest różnoboczny. Zatem punkt R leży wewnątrz jednego z kątów wypukłych BGD lub CGD.



Rysunek 34

Na półprostej $GF^{\to}$ wybierzmy punkt S wyznaczony przez równość

$$GS \cdot GF = GQ \cdot GD. \tag{1}$$

Wówczas punkty S, F, Q i D leżą na jednym okręgu, co oznacza, że

$$\sphericalangle GQF = \sphericalangle DSC. \tag{2}$$

Niech T będzie obrazem punktu P w przesunięciu o wektor $\overrightarrow{DC}$. Wtedy trójkąty DCT i BDP są przystające. Prawdziwe są też zależności $DT \parallel BP$, $CT \parallel DP$ oraz

$$\sphericalangle DTC = \sphericalangle BPD. \tag{3}$$

Wykażemy, że na czworokącie $SDCT$ można opisać okrąg i wobec tego

$$\sphericalangle DSC = \sphericalangle DTC. \tag{4}$$

Niech U oznacza punkt przecięcia odcinków CF i DT. Należy udowodnić, że

$$CU \cdot US = DU \cdot UT. \tag{5}$$

Punkt G jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, więc

$$GD = \tfrac{1}{2}AG, \qquad GE = \tfrac{1}{2}BG \qquad \text{oraz} \qquad GF = \tfrac{1}{2}CG.$$

Z twierdzenia Talesa wynika, że $CU = UG = \frac{1}{2}CG = GF$ i $DU = \frac{1}{2}BG = GE$. Zatem na podstawie zależności (1) otrzymujemy

$$CU \cdot US = CU \cdot (UG + GS) = GF \cdot (GF + GS) = GF^2 + GD \cdot GQ = GF^2 + \tfrac{1}{2}AG \cdot GQ = \\ = GF^2 + \tfrac{1}{2}BG \cdot GE = GF^2 + GE^2 \qquad \text{oraz}$$

$$DU \cdot UT = DU \cdot (DT - DU) = GE \cdot (BP - GE) = GE \cdot (GP + GE) = \\ = \tfrac{1}{2}BG \cdot GP + GE^2 = \tfrac{1}{2}CG \cdot GF + GE^2 = GF^2 + GE^2,$$

co dowodzi związku (5).

Łącząc zależności (2), (4) i (3) stwierdzamy, że $\sphericalangle GQF = \sphericalangle BPD$, co wraz z równością $\sphericalangle BPD = \sphericalangle GPR$ prowadzi do związku

$$\sphericalangle GQF = \sphericalangle GPR. \tag{6}$$

Jednakże $\sphericalangle GQF = \sphericalangle GQR$ lub $\sphericalangle GQF = 180^\circ - \sphericalangle GQR$, w zależności od tego, czy punkty R i B leżą po tej samej, czy też po przeciwnych stronach prostej AD. W obu przypadkach zależność (6) wskazuje, że punkty P, Q, R i G leżą na jednym okręgu, co kończy rozwiązanie.

Zadanie **3**. Każda dodatnia liczba całkowita jest pomalowana na czerwono albo na niebiesko. Funkcja f określona na zbiorze dodatnich liczb całkowitych i przyjmująca wartości w tym samym zbiorze na następujące dwie własności:

a) jeśli $x \leqslant y$, to $f(x) \leqslant f(y)$;

b) jeśli x, y i z są (niekoniecznie różnymi) dodatnimi liczbami całkowitymi tego samego koloru oraz $x + y = z$, to $f(x) + f(y) = f(z)$.

Dowieść, że istnieje taka dodatnia liczba rzeczywista a, że $f(x) \leqslant ax$ dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych x.

Rozwiązanie

Jeżeli istnieją takie liczby rzeczywiste b_1 i b_2, że $f(x) = b_1 x$ dla każdej liczby czerwonej x oraz $f(x) = b_2 x$ dla każdej liczby niebieskiej x, to liczba $a = \max\{b_1, b_2\}$ ma wymaganą własność. Przyjmijmy w takim razie, że istnieją dwie liczby czerwone c_1 i c_2, dla których

$$(1) \qquad \frac{f(c_1)}{c_1} \neq \frac{f(c_2)}{c_2}.$$

Niech $m = c_1 c_2 + 1$. Udowodnimy, że wśród dowolnych m kolejnych dodatnich liczb całkowitych istnieje liczba niebieska. Przypuśćmy bowiem, wbrew tej tezie, że dla pewnej dodatniej liczby całkowitej u każda z liczb u, $u+1$, $u+2$, $\ldots$, $u+m-2$, $u+m-1 = u+c_1c_2$ jest czerwona. Stosując warunek b) dla trójek liczb czerwonych $(x,y,z) = (u+(i-1)c_1, c_1, u+ic_1)$ dla $i = 1,2,3,\ldots,c_2$ uzyskujemy równości

$$f(u+ic_1) - f(u+(i-1)c_1) = f(c_1) \qquad \text{dla } i = 1,2,3,\ldots,c_2.$$

Dodając je stronami stwierdzamy, że

$$(2) \qquad f(u+c_2c_1) - f(u) = c_2 f(c_1).$$

Analogiczne rozumowanie, tym razem jednak dla trójek liczb czerwonych $(x,y,z) = (u+(i-1)c_2, c_2, u+ic_2)$ dla $i = 1,2,3,\ldots,c_1$, prowadzi do związku

$$(3) \qquad f(u+c_1c_2) - f(u) = c_1 f(c_2).$$

Porównując zależności (2) i (3) otrzymujemy równość $c_2 f(c_1) = c_1 f(c_2)$, co przeczy warunkowi (1) i dowodzi żądanego stwierdzenia.

Rozpatrzymy teraz dwa przypadki.

Przypadek **1.** Istnieje ciąg m kolejnych dodatnich liczb całkowitych zawierający tylko liczby niebieskie. Niech będzie to ciąg, którego pierwszym wyrazem jest liczba z i określmy $d = \max\{f(z), f(z+1), f(z+2), \ldots, f(z+m-1)\}$. Wykażemy, że

$$(4) \qquad f(x+1) - f(x) \leqslant d \qquad \text{dla każdej liczby całkowitej } x \geqslant z.$$

Niech więc $x \geqslant z$ będzie dowolną liczbą całkowitą i niech s będzie największą niebieską liczbą całkowitą nie przekraczającą x. Wśród liczb $s+z$, $s+z+1$, $s+z+2$, $\ldots$, $s+z+m-1$ istnieje liczba niebieska t. Wtedy różnica $t-s$ jest elementem zbioru $\{z, z+1, z+2, \ldots, z+m-1\}$, czyli jest liczbą niebieską oraz $f(t-s) \leqslant d$. Stąd i z własności b) uzyskujemy $f(t)-f(s)=f(t-s) \leqslant d$. Ponadto z nierówności $t>s$ i określenia liczby s wynika, że liczba niebieska t jest większa od x. Wobec tego $s \leqslant x < x+1 \leqslant t$, co wraz z warunkiem a) prowadzi do zależności $f(s) \leqslant f(x) \leqslant f(x+1) \leqslant f(t)$. W efekcie $f(x+1)-f(x) \leqslant f(t)-f(s) \leqslant d$, czyli otrzymaliśmy nierówność (4).

Przypadek **2.** Dowolny ciąg m kolejnych dodatnich liczb całkowitych zawiera zarówno liczbę czerwoną, jak i liczbę niebieską. W tej sytuacji istnieje liczba czerwona z większa od $2m-3$, dla której liczba $z+1$ jest niebieska. Zdefiniujmy $d=\max\{f(z), f(z+1)\}$. Udowodnimy, że

(5) $$f(x+1)-f(x) \leqslant d \qquad \text{dla każdej liczby całkowitej } x \geqslant 2m-1.$$

W tym celu weźmy pod uwagę dowolną liczbę całkowitą $x \geqslant 2m-1$. Wówczas istnieje największa czerwona liczba całkowita s nie przekraczająca x oraz istnieje największa niebieska liczba całkowita t mniejsza od s. Co więcej, prawdziwe są nierówności $s \geqslant x-(m-1)$ oraz $x>t \geqslant x-(2m-2)$. Z określenia liczby t wynika, że liczba $t+1$ jest czerwona. W takim razie liczba $z+t+1$ jest sumą liczb niebieskich $z+1$ i t oraz sumą liczb czerwonych z i $t+1$. Zatem

$$f(z+t+1)=f(z+1)+f(t) \qquad \text{lub} \qquad f(z+t+1)=f(z)+f(t+1)$$

i w rezultacie

$$f(z+t+1)-f(t) \leqslant d \qquad \text{lub} \qquad f(z+t+1)-f(t+1) \leqslant d.$$

Jednak pierwsza z powyższych nierówności pociąga za sobą drugą ze względu na zależność $f(t) \leqslant f(t+1)$. Wykazaliśmy w ten sposób, że

(6) $$f(z+t+1)-f(t+1) \leqslant d.$$

Ponadto nierówności $z \geqslant 2m-2$ i $x>t \geqslant x-(2m-2)$ prowadzą do wniosku, że $t+1 \leqslant x < x+1 \leqslant z+t+1$. W konsekwencji $f(t+1) \leqslant f(x) \leqslant f(x+1) \leqslant f(z+t+1)$, co wraz z zależnością (6) dowodzi nierówności (5).

W obu przypadkach istnieją takie dodatnie liczby całkowite c i d, że

(7) $$f(y+1)-f(y) \leqslant d \qquad \text{dla każdej liczby całkowitej } y \geqslant c.$$

Udowodnimy, że liczba $a=f(c)+d$ ma żądaną własność. Dla dodatnich liczb całkowitych $x \leqslant c$ zależność $f(x) \leqslant ax$ jest spełniona, gdyż

$$f(x) \leqslant f(c) \leqslant f(c)x < (f(c)+d)x = ax.$$

Niech z kolei x będzie dowolną liczbą całkowitą większą od c. Wypisując nierówności (7) dla $y = c, c+1, c+2, \ldots, x-1$ i dodając je stronami uzyskujemy $f(x) - f(c) \leqslant d(x-c)$. Zatem

$$f(x) \leqslant f(c) + d(x-c) < f(c) + dx \leqslant f(c)x + dx = ax.$$

Wykazaliśmy więc, że $f(x) \leqslant ax$ dla każdej dodatniej liczby całkowitej x.

Zadanie **4**. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych n, że liczba $2^{2^n+1}+1$ jest podzielna przez n, a liczba 2^n+1 nie jest podzielna przez n.

Rozwiązanie

Udowodnimy najpierw następujące stwierdzenie: dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych a oraz b liczba 2^a+1 jest podzielna przez 2^b+1 wtedy i tylko wtedy, gdy wykładnik a jest podzielny przez wykładnik b i liczba $\frac{a}{b}$ jest nieparzysta.

Jeżeli istnieje liczba całkowita nieparzysta d, dla której $a = bd$, to ma miejsce rozkład

$$2^a+1 = (2^b)^d+1 = (2^b+1)(2^{b(d-1)} - 2^{b(d-2)} + 2^{b(d-3)} - \ldots + 2^{2b} - 2^b + 1),$$

który pociąga za sobą żądaną podzielność. Na odwrót, przypuśćmy, że liczba 2^a+1 jest podzielna przez 2^b+1. Podzielmy liczbę a przez liczbę $2b$, otrzymując iloraz q oraz resztę $r \in \{0, 1, 2, \ldots, 2b-1\}$. Liczba

$$2^{2bq}-1 = (2^{2b})^q - 1 = (2^{2b}-1)(2^{2b(q-1)} + 2^{2b(q-2)} + \ldots + 2^{4b} + 2^{2b} + 1)$$

jest podzielna przez $2^{2b}-1 = (2^b-1)(2^b+1)$ i tym bardziej jest podzielna przez 2^b+1. Zatem suma

$$(2^a+1) + (2^{2bq}-1) = 2^a + 2^{2bq} = 2^{2bq+r} + 2^{2bq} = 2^{2bq}(2^r+1)$$

jest podzielna przez liczbę nieparzystą 2^b+1 i w rezultacie liczba 2^r+1 jest podzielna przez 2^b+1. Wynika stąd nierówność $2^r+1 \geqslant 2^b+1$, czyli $r \geqslant b$. W takim razie $r = b+t$ dla pewnej liczby $t \in \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$. Ponadto rożnica

$$(2^r+1) - (2^b+1) = 2^r - 2^b = 2^{b+t} - 2^b = 2^b(2^t-1)$$

jest podzielna przez liczbę nieparzystą 2^b+1, co oznacza, że także liczba 2^t-1 jest podzielna przez 2^b+1. Jednakże $0 \leqslant 2^t-1 \leqslant 2^{b-1}-1 < 2^b+1$, skąd $2^t-1=0$ i $t=0$. Ostatecznie uzyskujemy zależności $r=b$ oraz $a = 2bq+r = b(2q+1)$, co kończy dowód postulowanej równoważności.

Przechodzimy do rozwiązania zadania.

Najpierw określamy ciąg liczb całkowitych n_1, n_2, n_3, $\ldots$ wzorami: $n_1 = 57$ oraz $n_{i+1} = 2^{n_i}+1$ dla $i = 1, 2, 3, \ldots$. Wykażemy przez indukcję ze względu na i, że dla $i = 1, 2, 3, \ldots$ liczba $n = n_i$ ma opisaną w treści zadania własność.

Dla $i=1$ należy udowodnić, że liczba $2^{57}+1$ nie jest podzielna przez 57, a liczba $2^{2^{57}+1}+1$ jest podzielna przez 57. Na mocy małego twierdzenia Fermata (zob. *LI Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego*, Warszawa 2001, Dodatek A, str. 102) liczba $2^{18}-1$ jest podzielna przez 19. Zatem liczba

$$2^{57}+1 = 8(2^{54}-1) + 9 = 8(2^{18}-1)(2^{36}+2^{18}+1) + 9$$

daje resztę 9 z dzielenia przez 19, nie może więc być podzielna przez $57 = 3 \cdot 19$. Z drugiej strony, liczba 57 jest podzielna przez 3, a iloraz z tego dzielenia jest liczbą nieparzystą. Stąd i z zastosowanego dwukrotnie stwierdzenia sformułowanego w pierwszym akapicie rozwiązania wynika kolejno, że liczba $2^{57} + 1$ jest podzielna przez $2^3 + 1 = 9$, a liczba $2^{2^{57}+1} + 1$ jest podzielna przez $2^9 + 1 = 513 = 9 \cdot 57$. W efekcie liczba $2^{2^{57}+1} + 1$ jest podzielna przez 57.

Przypuśćmy z kolei, że i jest dodatnią liczbą całkowitą, dla której liczba $2^{n_i} + 1$ nie jest podzielna przez n_i, a liczba $2^{2^{n_i}+1} + 1$ jest podzielna przez n_i. Wykażemy, że liczba $2^{n_{i+1}} + 1$ nie jest podzielna przez n_{i+1}, natomiast liczba $2^{2^{n_{i+1}}+1} + 1$ jest podzielna przez n_{i+1}. Gdyby liczba $2^{n_{i+1}} + 1$ była podzielna przez $n_{i+1} = 2^{n_i} + 1$, to na mocy udowodnionego stwierdzenia wykładnik $2^{n_i} + 1$ byłby podzielny przez wykładnik n_i, wbrew założeniu uczynionemu w pierwszym zdaniu akapitu. Z drugiej strony, liczba $2^{n_{i+1}} + 1 = 2^{2^{n_i}+1} + 1$ jest na podstawie przyjętego założenia podzielna przez n_i, a iloraz z tego dzielenia jest liczbą nieparzystą, gdyż liczba $2^{n_{i+1}} + 1$ jest nieparzysta. Wobec tego w myśl wykazanego stwierdzenia liczba $2^{2^{n_{i+1}}+1} + 1$ jest podzielna przez $2^{n_i} + 1 = n_{i+1}$. To kończy dowód indukcyjny i rozwiązanie zadania.

Zadanie **5**. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 3$. Każde pole tabeli rozmiaru $n \times n$ pomalowano pewnym kolorem, przy czym liczba użytych kolorów wynosi co najmniej $\frac{1}{3}(n+2)^2$. Wykazać, że istnieje prostokąt o wymiarach 1×3 lub 3×1 złożony z trzech pól tabeli o różnych kolorach.

Rozwiązanie

Prostokąt o wymiarach 1×3 lub 3×1 złożony z trzech pól tabeli będziemy krótko nazywać *prostokątem.* Każdy z n wierszy i każda z n kolumn tabeli zawiera $n-2$ prostokątów, czyli liczba wszystkich prostokątów wynosi $2n(n-2)$.

Weźmy pod uwagę jeden z użytych kolorów; niech będzie to kolor zielony. Prostokąt, w którym co najmniej dwa pola są zielone, będziemy nazywać *prostokątem niedopuszczalnym.*

Udowodnimy najpierw, że jeżeli w pewnym wierszu tabeli zawierającym pola zielone znajduje się dokładnie k pól zielonych, to liczba ℓ prostokątów niedopuszczalnych złożonych z trzech kolejnych pól danego wiersza spełnia nierówność $\ell \leqslant \frac{3}{2}k-1$. Dla $k=1$ stwierdzenie to jest prawdziwe, gdyż wtedy $\ell=0$. Niech więc $k \geqslant 2$. Dla każdego spośród rozważanych ℓ prostokątów niedopuszczalnych obliczmy liczbę pól zielonych należących do tego prostokąta oraz oznaczmy przez s sumę tak otrzymanych ℓ liczb. W każdym prostokącie niedopuszczalnym co najmniej dwa pola są zielone. Wobec tego

$$(1) \qquad s \geqslant 2\ell.$$

Dla każdego spośród k pól zielonych leżących w danym wierszu obliczmy z kolei liczbę prostokątów niedopuszczalnych zawartych w tym wierszu, do których należy dane pole. Suma uzyskanych k liczb wynosi s. Jednak każde z tych k pól zielonych należy do co najwyżej 3 prostokątów niedopuszczalnych położonych w rozważanym wierszu, a ponadto dwa skrajne pola zielone tego wiersza mogą należeć do co najwyżej 2 takich prostokątów. Zatem

$$(2) \qquad s \leqslant (k-2)\cdot 3 + 2\cdot 2 = 3k-2.$$

Nierówności (1) i (2) pociągają za sobą postulowaną zależność $\ell \leq \frac{3}{2}k-1$.

Niech m oznacza liczbę wszystkich pól zielonych tabeli. Wykażemy, że liczba prostokątów niedopuszczalnych nie przekracza $3(m-1)$. Załóżmy przy tym, że $m \geqslant 2$, gdyż dla $m=1$ sformułowane stwierdzenie jest oczywiście prawdziwe. Niech p będzie liczbą wierszy tabeli zawierających co najmniej jedno pole zielone. Dla $i=1,2,\ldots,p$ oznaczmy przez x_i liczbę pól zielonych znajdujących się w i-tym spośród tych wierszy. Wtedy spełniona jest równość $x_1+x_2+\ldots+x_p=m$. Z drugiej strony, każdy prostokąt niedopuszczalny położony w pewnym wierszu tabeli znajduje się w jednym spośród rozpatrywanych p wierszy. To wraz z nierównością udowodnioną w poprzednim akapicie dowodzi, że łączna liczba tych prostokątów nie przekracza

$$(\tfrac{3}{2}x_1 - 1) + (\tfrac{3}{2}x_2 - 1) + \ldots + (\tfrac{3}{2}x_p - 1) = \tfrac{3}{2}(x_1 + x_2 + \ldots + x_p) - p = \tfrac{3}{2}m - p.$$

Analogicznie uzasadniamy, że jeżeli q oznacza liczbę kolumn tabeli zawierających co najmniej jedno pole zielone, to liczba prostokątów niedopuszczalnych położonych w pewnej kolumnie tabeli nie przekracza $\frac{3}{2}m - q$. W rezultacie liczba wszystkich prostokątów niedopuszczalnych nie przekracza

$$(\tfrac{3}{2}m - p) + (\tfrac{3}{2}m - q) = 3m - (p + q) \leqslant 3m - 3 = 3(m - 1),$$

gdzie wykorzystaliśmy zależność $p + q \geqslant 3$. Na mocy założenia, że w tabeli istnieją co najmniej dwa pola zielone, liczby p i q są bowiem dodatnie i przynajmniej jedna z nich jest większa od 1.

Oznaczmy wreszcie przez t liczbę kolorów użytych do pomalowania pól tabeli. Dla $i = 1, 2, \ldots, t$ niech a_i będzie liczbą pól pomalowanych i-tym kolorem. Wówczas w myśl stwierdzenia uzasadnionego w poprzednim akapicie rozwiązania dla $i = 1, 2, \ldots, n$ liczba prostokątów zawierających co najmniej dwa pola pomalowane i-tym kolorem nie przekracza $3(a_i - 1)$. W takim razie liczba prostokątów zawierających dwa pola o jednakowym kolorze nie przekracza

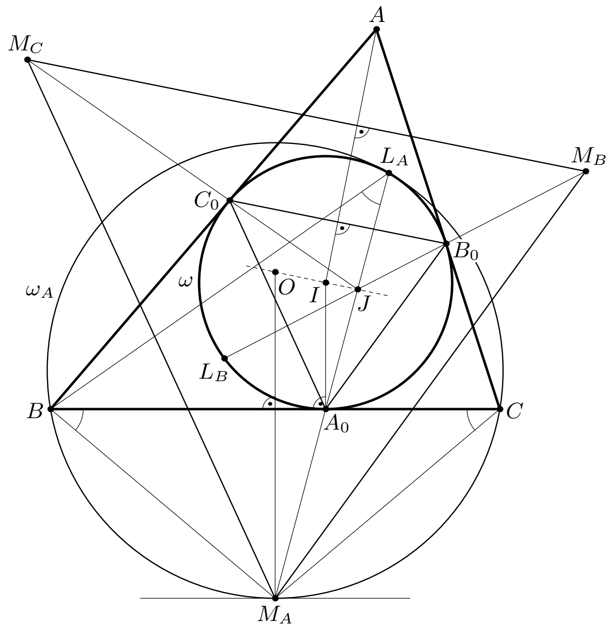
$$\begin{aligned} &3(a_1 - 1) + 3(a_2 - 1) + \ldots + 3(a_t - 1) = 3(a_1 + a_2 + \ldots + a_t) - 3t = \\ &= 3n^2 - 3t \leqslant 3n^2 - 3 \cdot \tfrac{1}{3}(n + 2)^2 = 3n^2 - (n + 2)^2 = 2n^2 - 4n - 4 < 2n(n - 2), \end{aligned}$$

a więc jest mniejsza od liczby wszystkich prostokątów, skąd wynika teza.

Zadanie **6**. W trójkącie ABC punkty I i O są odpowiednio środkami okręgów wpisanego i opisanego. Okrąg ω_A przechodzący przez punkty B i C, okrąg ω_B przechodzący przez punkty C i A oraz okrąg ω_C przechodzący przez punkty A i B są styczne do okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Okręgi ω_B i ω_C przecinają się w punkcie A' różnym od A, okręgi ω_C i ω_A przecinają się w punkcie B' różnym od B, a okręgi ω_A i ω_B przecinają się w punkcie C' różnym od C. Dowieść, że proste AA', BB' i CC' przecinają się w punkcie leżącym na prostej IO.

Rozwiązanie

Niech okrąg ω wpisany w trójkąt ABC będzie styczny do jego boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach A_0, B_0 i C_0. Oznaczmy ponadto przez L_A, L_B i L_C punkty, w których odpowiednio okręgi ω_A, ω_B i ω_C są styczne do okręgu ω (rys. 35).



Rysunek 35

Jednokładność o środku w punkcie L_A, która odwzorowuje okrąg ω na okrąg ω_A, przeprowadza punkt A_0 na taki punkt M_A, że styczna w tym punkcie do okręgu ω_A jest równoległa do prostej BC. Wynika stąd, że punkt M_A jest środkiem tego łuku BC okręgu ω_A, który nie zawiera punktu L_A. Zatem

$$\sphericalangle M_A B A_0 = \sphericalangle M_A C B = \sphericalangle M_A L_A B$$

i w rezultacie trójkąty $M_A B A_0$ i $M_A L_A B$ są podobne (cecha *kąt-kąt-kąt*). Podobieństwo to pociąga za sobą zależność

$$M_A B^2 = M_A A_0 \cdot M_A L_A.$$

W konsekwencji punkt M_A ma jednakowe potęgi względem okręgu ω oraz punktu B traktowanego jako zdegenerowany okrąg o zerowym promieniu (zob. *LVI Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego*, Warszawa 2007, Dodatek, str. 99; znajdujące się tam dowody zachowują moc dla okręgów o zerowym promieniu). Analogicznie stwierdzamy, że punkt M_A ma jednakowe potęgi względem okręgu ω i punktu C.

Niech M_B będzie obrazem punktu B_0 w jednokładności o środku L_B przekształcającej okrąg ω na ω_B, a M_C — obrazem punktu C_0 w jednokładności o środku L_C przekształcającej okrąg ω na ω_C. Wówczas rozumowanie podobne do przeprowadzonego w poprzednim akapicie dowodzi, że punkty M_B i M_C leżą na osi potęgowej okręgu ω i punktu A. Wobec tego prosta M_BM_C jest prostopadła do prostej AI, czyli równoległa do prostej B_0C_0. Analogicznie uzasadniamy zależności $M_CM_A \parallel C_0A_0$ oraz $M_AM_B \parallel A_0B_0$. W takim razie boki trójkąta $M_AM_BM_C$ są równoległe do odpowiednich boków trójkąta $A_0B_0C_0$. Istnieje więc jednokładność j, która przeprowadza wierzchołki A_0, B_0 i C_0 odpowiednio na wierzchołki M_A, M_B i M_C. Oznaczmy przez J i λ odpowiednio środek i skalę jednokładności j. Wtedy

$$\frac{JM_A}{JA_0} = \frac{JM_B}{JB_0} = \frac{JM_C}{JC_0} = \lambda. \tag{1}$$

Punkty A_0, B_0, L_A i L_B leżą na jednym okręgu, skąd uzyskujemy

$$JA_0 \cdot JL_A = JB_0 \cdot JL_B.$$

Mnożąc obie strony powyższej równości przez λ i korzystając ze związków (1) otrzymujemy zależność

$$JM_A \cdot JL_A = JM_B \cdot JL_B,$$

która oznacza, że punkt J ma jednakowe potęgi względem okręgów ω_A i ω_B. Wynika stąd, że punkt J leży na prostej CC' będącej osią potęgową tych dwóch okręgów. Podobnie dowodzimy, że również proste AA' i BB' przechodzą przez punkt J.

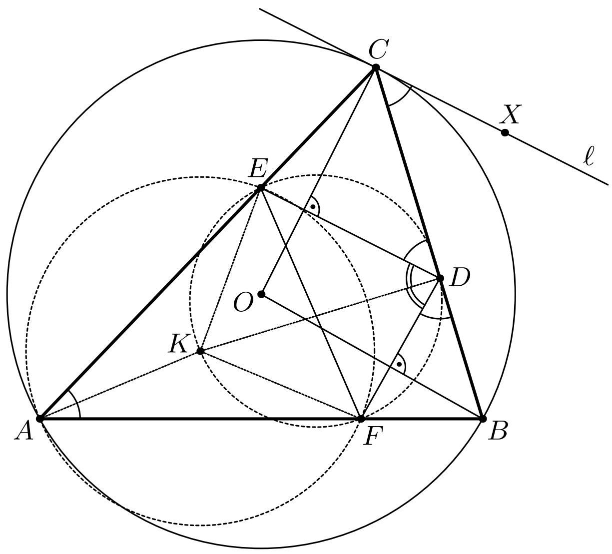
Do zakończenia rozwiązania pozostaje wykazać, że punkt J leży na prostej IO. W tym celu uzasadnimy, że jednokładność j przeprowadza punkt I na punkt O. Istotnie, prosta IA_0 prostopadła do prostej BC jest przekształcana przez tę jednokładność na prostą prostopadłą do prostej BC przechodzącą przez punkt M_A, czyli na symetralną odcinka BC. Analogicznie jednokładność j przekształca prostą IB_0 na symetralną odcinka CA. W efekcie punkt I, w którym przecinają się proste IA_0 oraz IB_0, jest odwzorowywany przez jednokładność j na punkt przecięcia symetralnych odcinków BC oraz CA, a więc na punkt O. To kończy rozwiązanie zadania.

I Europejska Olimpiada Matematyczna Dziewcząt

Zadanie **1**. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkty D, E i F leżą odpowiednio wewnątrz boków BC, CA i AB tego trójkąta, przy czym prosta DE jest prostopadła do prostej CO, a prosta DF jest prostopadła do prostej BO. Punkt K jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie AFE. Wykazać, że proste DK oraz BC są prostopadłe.

Rozwiązanie

Poprowadźmy prostą ℓ styczną w punkcie C do okręgu opisanego na trójkącie ABC i wybierzmy na tej stycznej punkt X leżący po przeciwnej stronie prostej BC niż punkt A (rys. 36).



Rysunek 36

Na mocy twierdzenia o kącie pomiędzy styczną a cięciwą otrzymujemy

(1) $$\sphericalangle XCB = \sphericalangle CAB.$$

Ponieważ prosta CO jest prostopadła do prostych ℓ oraz DE, więc proste ℓ i DE są równoległe, skąd wynika równość kątów odpowiadających

(2) $$\sphericalangle XCB = \sphericalangle EDC.$$

Łącząc związki (1) i (2) stwierdzamy, że

(3) $$\sphericalangle EDC = \sphericalangle CAB.$$

Podobnie uzasadniamy zależność

(4) $$\sphericalangle BDF = \sphericalangle CAB.$$

Zatem

$$2\sphericalangle CAB = \sphericalangle BDF + \sphericalangle EDC < \sphericalangle BDF + \sphericalangle FDE + \sphericalangle EDC = 180^\circ,$$

co dowodzi, że w trójkątach ABC i AFE kąt przy wierzchołku A jest ostry. Wobec tego środek K okręgu wpisanego w trójkąt AFE leży po tej samej stronie prostej EF co punkt A. Ponadto korzystając z zależności pomiędzy kątem środkowym i kątem wpisanym oraz z równości (3) i (4) uzyskujemy

$$\sphericalangle FKE = 2\sphericalangle FAE = 2\sphericalangle CAB = \sphericalangle BDF + \sphericalangle EDC = 180^\circ - \sphericalangle FDE$$

i w efekcie na czworokącie $EKFD$ można opisać okrąg. Z kolei odcinki KE i KF mają równe długości; prosta DK jest więc dwusieczną kąta FDE, czyli

$$\sphericalangle FDK = \sphericalangle KDE. \tag{5}$$

Związki (3), (4) i (5) prowadzą do wniosku, że

$$\sphericalangle BDK = \sphericalangle BDF + \sphericalangle FDK = \sphericalangle EDC + \sphericalangle KDE = \sphericalangle KDC,$$

skąd dostajemy $\sphericalangle BDK = \sphericalangle KDC = 90^\circ$, co jest równoznaczne z tezą zadania.

Zadanie **2**. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Wyznaczyć, w zależności od n, największą możliwą liczbę całkowitą m o następującej własności: w każde pole tabeli o m wierszach i n kolumnach można wpisać liczbę rzeczywistą w taki sposób, by dla dowolnych dwóch różnych wierszy $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ oraz $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ spełniona była równość

$$\max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \ldots, |a_n - b_n|\} = 1. \tag{1}$$

Rozwiązanie

Weźmy pod uwagę dowolną tabelę o m wierszach i n kolumnach, mającą wymaganą własność. Dla $i = 1, 2, \ldots, n$ oznaczmy przez k_i najmniejszą wartość występującą w i-tej kolumnie i pomalujmy na czerwono wszystkie pola tej kolumny, w których znajduje się liczba k_i. Zauważmy, że dla $i = 1, 2, \ldots, n$ wszystkie liczby występujące w i-tej kolumnie należą do przedziału $\langle k_i; k_i + 1\rangle$. Żadna z nich nie może być bowiem mniejsza od liczby k_i na mocy określenia tej ostatniej. Gdyby natomiast w i-tej kolumnie znajdowała się liczba ℓ większa od $k_i + 1$, to w tabeli istniałyby: wiersz $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$, w którym $a_i = \ell$, oraz wiersz $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$, w którym $b_i = k_i$. Wtedy prawdziwa byłaby nierówność $|a_i - b_i| = \ell - k_i > 1$, która przeczy warunkowi (1).

Przyporządkujmy teraz każdemu wierszowi podzbiór zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ w następujący sposób: wierszowi $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ przypisujemy zbiór wszystkich tych wskaźników $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, dla których i-te pole rozważanego wiersza (zawierające liczbę a_i) jest czerwone. Wykażemy, że różnym wierszom przyporządkowane są różne podzbiory. W tym celu przypuśćmy, że dwóm różnym wierszom $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ i $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ przypisany został ten sam podzbiór. Wtedy dla $i = 1, 2, \ldots, n$ albo i-te pola w obu wierszach są czerwone, albo też żadne z nich nie jest czerwone, czyli albo liczby a_i oraz b_i są równe k_i, albo też obie te liczby należą do przedziału $(k_i; k_i + 1\rangle$. W obu przypadkach różnica pomiędzy tymi dwiema liczbami jest mniejsza od 1. Jednak uzyskane nierówności $|a_i - b_i| < 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ przeczą zależności (1).

Udowodniliśmy w ten sposób, że liczba wierszy tabeli nie przekracza liczby wszystkich podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Zatem $m \leqslant 2^n$. Z drugiej strony, liczba $m = 2^n$ ma wymaganą własność. Istnieje bowiem 2^n różnych ciągów n-wyrazowych o wyrazach ze zbioru $\{0, 1\}$. Możemy więc tak wypełnić tabelę o 2^n wierszach i n kolumnach liczbami 0 i 1, by każdy wiersz zawierał kolejne wyrazy pewnego spośród tych ciągów, a żadne dwa wiersze nie były jednakowe. Wówczas dla dowolnych dwóch różnych wierszy $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ i $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ otrzymanej tabeli liczby $|a_i - b_i|$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ są równe 0 lub 1 i co najmniej jedna z nich jest różna od zera, co dowodzi związku (1).

Odpowiedź: Szukana największa wartość wynosi $m = 2^n$.

Zadanie **3**. Wyznaczyć wszystkie funkcje określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości w tym samym zbiorze, spełniające równanie

$$f(yf(x+y)+f(x)) = 4x+2yf(x+y) \tag{1}$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y.

Rozwiązanie

Podstawiając $y=0$ w równaniu (1) otrzymujemy

$$f(f(x)) = 4x \qquad \text{dla każdego } x. \tag{2}$$

Wynika stąd, że funkcja f jest różnowartościowa. Jeżeli bowiem x i y są liczbami rzeczywistymi, dla których $f(x)=f(y)$, to wykorzystując związek (2) dostajemy $4x = f(f(x)) = f(f(y)) = 4y$, czyli $x=y$.

Przyjmując z kolei $x=0$ oraz $x=f(0)$ w zależności (2) stwierdzamy, że

$$f(0) = f(4\cdot 0) = f(f(f(0))) = 4f(0),$$

skąd uzyskujemy równość

$$f(0) = 0. \tag{3}$$

Podstawmy teraz $x=0$ i $y=1$ w warunku (1), otrzymując

$$f(f(1)+f(0)) = 2f(1).$$

To wraz z zależnościami (3) i (2) implikuje, że $2f(1) = f(f(1)) = 4$, a więc

$$f(1) = 2 \tag{4}$$

oraz

$$f(2) = f(f(1)) = 4. \tag{5}$$

Niech wreszcie x będzie dowolną liczbą rzeczywistą i przyjmijmy $y = 1-x$ w równaniu (1). Wówczas uzyskujemy związek

$$f((1-x)f(1)+f(x)) = 4x+2(1-x)f(1),$$

który na podstawie zależności (4) i (5) możemy przepisać w postaci

$$f(2(1-x)+f(x)) = 4x+4(1-x) = 4 = f(2). \tag{6}$$

Jak stwierdziliśmy wcześniej, funkcja f jest różnowartościowa. Wobec tego z równości (6) wynika równość $2(1-x)+f(x)=2$, czyli $f(x)=2x$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że funkcja określona wzorem $f(x)=2x$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x spełnia zależność (1).

Odpowiedź: Jedyną funkcją o żądanej własności jest funkcja $f(x)=2x$.

Zadanie **4**. Rozstrzygnąć, czy istnieje zbiór liczb całkowitych A o następujących dwóch własnościach:

1) każdy element $a \in A$ jest sumą pewnej pary (niekoniecznie różnych) elementów $b, c \in A$;
2) liczba 0 jest jedyną liczbą całkowitą, której nie można przedstawić jako sumy wszystkich elementów niepustego skończonego podzbioru zbioru A.

Rozwiązanie

Określmy ciąg dodatnich liczb całkowitych $a_1, a_2, a_3, \ldots$ za pomocą wzorów: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ oraz $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ dla $n = 3, 4, 5, \ldots$. Udowodnimy, że zbiór

$$A = \{-a_1, a_2, -a_3, a_4, -a_5, a_6, \ldots\}$$

spełnia warunki zadania.

Własność 1) wynika wprost z określenia rozważanego ciągu, gdyż

$$-a_{2k-1} = a_{2k} + (-a_{2k+1}) \qquad \text{oraz} \qquad a_{2k} = (-a_{2k+1}) + a_{2k+2}$$

dla każdej liczby całkowitej $k \geqslant 1$.

Przejdźmy teraz do dowodu własności 2). Należy więc wykazać, że

a) każdą liczbę całkowitą m różną od zera można zapisać w postaci

$$(1) \qquad m = (-1)^{c_1} a_{c_1} + (-1)^{c_2} a_{c_2} + \ldots + (-1)^{c_n} a_{c_n},$$

gdzie $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ jest skończonym ściśle rosnącym ciągiem dodatnich liczb całkowitych, być może złożonym z pojedynczego wyrazu, oraz

b) liczby $m = 0$ nie można przedstawić w postaci (1).

Aby uzasadnić prawdziwość zdania a), udowodnimy za pomocą indukcji ze względu na wartość $|m|$ następujące mocniejsze stwierdzenie: dla każdej liczby całkowitej $m \neq 0$ istnieje takie przedstawienie w postaci (1), że liczba c_n jest najmniejszym wskaźnikiem $t \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, dla którego $a_t \geqslant |m|$ oraz liczby m i $(-1)^t$ mają ten sam znak. Innymi słowy, liczba $(-1)^{c_n} a_{c_n}$ jest, spośród elementów zbioru A o tym samym znaku co liczba m, elementem o możliwie małej wartości bezwzględnej nie mniejszej niż $|m|$.

Dla $|m| = 1$ sformułowane przed chwilą stwierdzenie jest prawdziwe: przedstawieniami o opisanej własności są $1 = (-a_1) + a_2$ oraz $-1 = -a_1$.

Rozpatrzmy z kolei dowolną liczbę całkowitą p spełniającą zależność $|p| \geqslant 2$ i przypuśćmy, że dowodzone stwierdzenie jest słuszne dla wszystkich różnych od zera liczb całkowitych m o wartościach bezwzględnych mniejszych od $|p|$. Wykażemy jego prawdziwość dla $m = p$.

W tym celu weźmy pod uwagę najmniejszy wskaźnik $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, dla którego $a_k \geqslant |p|$ oraz liczby p i $(-1)^k$ mają jednakowy znak. Jeżeli ma miejsce równość

$p = (-1)^k a_k$, to daje ona poszukiwane przedstawienie liczby p. W takim razie możemy założyć, że $a_k > |p|$, skąd uzyskujemy nierówność $a_k > 2$, czyli $k \geqslant 3$. To wraz z określeniem liczby k prowadzi do wniosku, że $a_k > |p| > a_{k-2}$. Ponadto liczby p i $(-1)^k a_k$ mają jednakowy znak. Wobec tego

$$(2) \qquad |p-(-1)^k a_k| = |(-1)^k a_k| - |p| = a_k - |p| < a_k - a_{k-2} = a_{k-1},$$

a liczba $q = p - (-1)^k a_k$ ma ten sam znak, co liczba $(-1)^{k-1}$.

Niech teraz $\ell \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ będzie najmniejszym wskaźnikiem, dla którego $a_\ell \geqslant |q|$ oraz liczby q i $(-1)^\ell$ mają jednakowy znak. Wtedy liczby $k-1$ oraz ℓ mają tę samą parzystość i na mocy zależności (2) stwierdzamy, że $\ell \leqslant k-1$. Jeżeli $q = (-1)^\ell a_\ell$, to prawdziwa jest równość $p = (-1)^\ell a_\ell + (-1)^k a_k$, która znów daje żądane przedstawienie liczby p. Przyjmijmy więc, że $a_\ell > |q|$. Wówczas liczba $r = q - (-1)^\ell a_\ell$ ma ten sam znak, co liczba p. Co więcej, rozumując tak jak przed zależnościami (2) dowodzimy, że $\ell \geqslant 3$ oraz $a_\ell > |q| > a_{\ell-2}$ i w efekcie

$$(3) \quad |r| = |q-(-1)^\ell a_\ell| = |(-1)^\ell a_\ell| - |q| = a_\ell - |q| < a_\ell - a_{\ell-2} = a_{\ell-1} \leqslant a_{k-2} < |p|.$$

Na mocy nierówności $0 < |r| < |p|$ możemy zastosować założenie indukcyjne do liczby r, otrzymując ściśle rosnący ciąg dodatnich liczb całkowitych $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, dla którego

$$(4) \qquad p - (-1)^\ell a_\ell - (-1)^k a_k = r = (-1)^{c_1} a_{c_1} + (-1)^{c_2} a_{c_2} + \ldots + (-1)^{c_n} a_{c_n}.$$

Ponadto wyraz c_n jest najmniejszym wskaźnikiem $t \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, dla którego $a_t \geqslant |r|$ oraz liczby r i $(-1)^t$ mają jednakowy znak. Jednak liczba r ma ten sam znak, co liczba p, a więc — ten sam znak, co liczby $(-1)^k$ i $(-1)^{\ell-1}$. Z zależności (3) wynika z kolei, że $|r| < a_{\ell-1}$. To wraz ze zdaniem następującym po wzorze (4) pociąga za sobą nierówność $c_n \leqslant \ell - 1$. W takim razie ciąg $(c_1, c_2, \ldots, c_n, \ell, k)$ jest ściśle rosnący, a związek (4) pozwala stwierdzić, że

$$p = (-1)^{c_1} a_{c_1} + (-1)^{c_2} a_{c_2} + \ldots + (-1)^{c_n} a_{c_n} + (-1)^\ell a_\ell + (-1)^k a_k.$$

Uzyskaliśmy w ten sposób wymagane przedstawienie liczby p, co kończy krok indukcyjny.

Przechodzimy do dowodu zdania b). Należy wykazać, że dla dowolnego ściśle rosnącego ciągu dodatnich liczb całkowitych $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ prawa strona wzoru (1) jest różna od zera, czyli że suma dodatnich składników jest różna od sumy wartości bezwzględnych ujemnych składników. W tym celu udowodnimy, że suma wartości bezwzględnych wszystkich składników o tym samym znaku, co liczba $(-1)^{c_n}$, jest większa od sumy wartości bezwzględnych wszystkich składników przeciwnego znaku.

Suma wartości bezwzględnych tych składników prawej strony równości (1), które mają ten sam znak co liczba $(-1)^{c_n}$, wynosi co najmniej a_{c_n}. Każdy składnik przeciwnego znaku ma postać $(-1)^s a_s$ dla pewnej liczby $s \in \{1, 2, 3, \ldots, c_n - 1\}$ o tej samej parzystości, co liczba $c_n - 1$. Zatem suma wartości bezwzględnych wszystkich tych składników nie przekracza liczby $b = a_{c_n-1} + a_{c_n-3} + \ldots + a_{r+2} + a_r$, gdzie $r = 1$ albo $r = 2$, gdy liczba c_n jest odpowiednio parzysta albo nieparzysta. Dodając stronami zależności

$$a_k = a_{k+1} - a_{k-1} \qquad \text{dla } k = c_n - 1, c_n - 3, \ldots, r + 4, r + 2$$

otrzymujemy związek $b = a_{c_n} - a_{r+1} + a_r$, który w połączeniu z nierównościami $a_1 < a_2 < a_3$ dowodzi, że $b < a_{c_n}$. Wynika stąd prawdziwość ostatniego zdania poprzedniego akapitu, a więc — prawdziwość zdania b).

Odpowiedź: Tak.

Zadanie **5**. Liczby p oraz q są pierwsze i spełniają równanie

$$\frac{p}{p+1}+\frac{q+1}{q}=\frac{2n}{n+2}$$

dla pewnej dodatniej liczby całkowitej n. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości wyrażenia $q-p$.

Rozwiązanie

Z danej w treści zadania równości otrzymujemy

$$\frac{1}{p+1}-\frac{1}{q}=\Big(1-\frac{p}{p+1}\Big)+\Big(1-\frac{q+1}{q}\Big)=2-\frac{2n}{n+2}=\frac{4}{n+2}.$$

Mnożąc lewą i prawą stronę przez $(p+1)q$ stwierdzamy, że

$$q-(p+1)=\frac{4(p+1)q}{n+2}. \tag{1}$$

Prawa strona zależności (1) jest liczbą dodatnią, więc lewa strona także jest dodatnia. To oznacza, że

$$q>p+1. \tag{2}$$

Z kolei lewa strona zależności (1) jest liczbą całkowitą, skąd liczba $n+2$ jest dzielnikiem liczby $4(p+1)q$. Gdyby liczba $n+2$ nie była podzielna przez liczbę pierwszą q, to liczba $n+2$ byłaby dzielnikiem liczby $4(p+1)$. Wówczas jednak prawa strona związku (1) byłaby dodatnią liczbą całkowitą podzielną przez q, co nie jest możliwe, gdyż lewa strona jest mniejsza od q. Wobec tego iloraz

$$a=\frac{n+2}{q}$$

jest liczbą całkowitą. Równość (1) przybiera teraz postać

$$q-(p+1)=\frac{4(p+1)}{a}.$$

Stąd uzyskujemy zależność

$$aq=(a+4)(p+1). \tag{3}$$

Liczba $p+1$ jest więc dzielnikiem iloczynu aq. Ponadto na mocy nierówności (2) liczba $p+1$ jest względnie pierwsza z liczbą pierwszą q i w takim razie jest ona dzielnikiem liczby a. Wobec tego $a=(p+1)b$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej b, a związek (3) prowadzi do wniosku, że

$$bq=b(p+1)+4 \quad \text{czyli} \quad 4=b(q-p-1).$$

Liczba b jest więc dodatnim dzielnikiem liczby 4. Podstawiając kolejno $b=1$, $b=2$ i $b=4$ obliczamy, że różnica $q-p$ przyjmuje odpowiednio wartości 5, 3 i 2.

Pozostaje stwierdzić, że każda z tych trzech wartości jest osiągana dla pewnej trójki (p, q, n) spełniającej warunki zadania — przykładami takich trójek są odpowiednio $(2, 7, 19)$, $(2, 5, 28)$ i $(3, 5, 78)$, co nietrudno sprawdzić posługując się równoważnym danej w zadaniu zależności wzorem (1), w którym znajomość wartości p i q pozwala wyznaczyć wartość n.

Odpowiedź: Możliwe wartości różnicy $q - p$ wynoszą 2, 3 oraz 5.

Zadanie **6**. Portal społecznościowy Mordoksięga ma nieskończenie wielu użytkowników. Niektóre pary różnych użytkowników są zarejestrowane jako przyjaciele, przy czym każdy użytkownik ma co najmniej jednego przyjaciela.

Każdy użytkownik wyznacza jednego ze swoich przyjaciół na najlepszego przyjaciela. Jeżeli osoba A wyznacza osobę B na swojego najlepszego przyjaciela, to osoba B nie musi koniecznie wyznaczyć osoby A na swojego najlepszego przyjaciela.

Użytkownik jest 1-najlepszym przyjacielem, jeżeli ktoś wyznaczył go na swojego najlepszego przyjaciela. Dla $n = 2, 3, 4, \ldots$ użytkownik jest n-najlepszym przyjacielem, jeżeli został wyznaczony na najlepszego przyjaciela przez osobę, która jest $(n-1)$-najlepszym przyjacielem. Użytkownika, który jest k-najlepszym przyjacielem dla każdej dodatniej liczby całkowitej k, nazywamy użytkownikiem popularnym.

a) Dowieść, że jeśli każdy użytkownik ma tylko skończenie wielu przyjaciół, to każdy użytkownik popularny został wyznaczony na najlepszego przyjaciela przez jakiegoś innego użytkownika popularnego.

b) Wykazać, że jeżeli użytkownicy mogą mieć nieskończenie wielu przyjaciół, to może się zdarzyć, że pewien użytkownik popularny nie został wyznaczony na najlepszego przyjaciela przez żadnego innego użytkownika popularnego.

Rozwiązanie

a) Dla każdego użytkownika A oznaczmy przez $f(A)$ osobę, którą ten użytkownik wyznaczył na swojego najlepszego przyjaciela.

Niech X będzie dowolnym użytkownikiem popularnym. Ponieważ jest on k-najlepszym przyjacielem dla każdej liczby całkowitej $k \geqslant 1$, więc istnieją takie osoby X_1, X_2, X_3, …, że

$$X = \underbrace{f(f(\ldots f(f}_{k}(X_k))\ldots)) \qquad \text{dla } k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Określmy użytkowników Y_1, Y_2, Y_3, … następująco: $Y_1 = X_1$ oraz

(1) $$Y_k = \underbrace{f(f(\ldots f(f}_{k-1}(X_k))\ldots)) \qquad \text{dla } k = 2, 3, 4, \ldots.$$

Wówczas prawdziwe są zależności

(2) $$f(Y_k) = f(\underbrace{f(f(\ldots f(f}_{k-1}(X_k))\ldots))) = \underbrace{f(f(f(\ldots f(f}_{k}(X_k))\ldots))) = X$$

dla $k = 1, 2, 3, \ldots$. Każda z osób występujących w ciągu Y_1, Y_2, Y_3, … jest więc przyjacielem użytkownika X. Jednak użytkownik ten ma tylko skończenie wielu przyjaciół. Zatem pewna osoba powtarza się w wypisanym ciągu nieskończenie wiele razy. Istnieje więc ciąg dodatnich liczb całkowitych $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, dla którego $Y_{n_1} = Y_{n_2} = Y_{n_3} = \ldots$. Z zależności (2) wynika, że użytkownik $Y = Y_{n_1}$ wyznaczył na swojego najlepszego przyjaciela osobę X. Wobec tego wystarczy udowodnić, że Y jest użytkownikiem popularnym. W tym celu rozpatrzmy dowolną liczbę całkowitą $k \geqslant 1$ oraz niech i będzie takim wskaźnikiem, że $n_i > k$. Wtedy na mocy równości (1) otrzymujemy

$$Y = Y_{n_i} = \underbrace{f(f(\ldots f(f}_{k}(P))\ldots)), \qquad \text{gdzie } P = \underbrace{f(f(\ldots f(f}_{n_i - k}(X_{n_i}))\ldots)).$$

W takim razie użytkownik Y jest k-najlepszym przyjacielem, co dowodzi tezy.

b) Niech wszystkimi użytkownikami będą: osoba X oraz osoby $X_{i,j}$, gdzie i, j są liczbami całkowitymi spełniającymi nierówności $i \geqslant j > 0$. Niech ponadto dla $i > j$ najlepszym przyjacielem użytkownika $X_{i,j}$ będzie użytkownik $X_{i,j+1}$, a najlepszym przyjacielem każdej z osób $X_{1,1}$, $X_{2,2}$, $X_{3,3}$, $\ldots$ niech będzie osoba X. Przyjmijmy też, że dwie osoby są przyjaciółmi wtedy i tylko wtedy, gdy jedna z nich wyznaczyła drugą na swojego najlepszego przyjaciela.

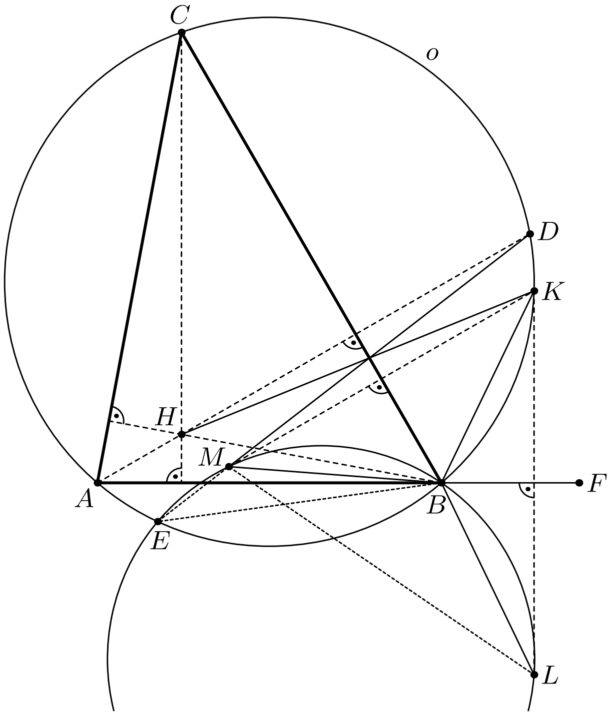
Udowodnimy, że wówczas użytkownik X jest jedynym użytkownikiem popularnym. Stąd oczywiście wyniknie, że nie został on wyznaczony na najlepszego przyjaciela przez żadnego innego użytkownika popularnego.

Dla $k = 1, 2, 3, \ldots$ w ciągu osób $X_{k,1}$, $X_{k,2}$, $\ldots$, $X_{k,k}$, X każda osoba wyznaczyła na najlepszego przyjaciela kolejną osobę w tym ciągu, a więc użytkownik X jest k-najlepszym przyjacielem. To oznacza, że użytkownik X jest popularny.

Z drugiej strony, dla dowolnych liczb całkowitych $i \geqslant j > 1$ jedynym użytkownikiem, który wyznaczył osobę $X_{i,j}$ na najlepszego przyjaciela, jest użytkownik $X_{i,j-1}$. Natomiast żadna z osób $X_{1,1}$, $X_{2,1}$, $X_{3,1}$, $\ldots$ nie została w ogóle wyznaczona na najlepszego przyjaciela. Wobec tego dla dowolnych liczb całkowitych $i \geqslant j > 0$ ciąg $X_{i,1}$, $X_{i,2}$, $\ldots$, $X_{i,j}$ jest najdłuższym ciągiem osób, w którym każda osoba wyznaczyła na najlepszego przyjaciela kolejną osobę w ciągu, a ostatnią osobą jest użytkownik $X_{i,j}$. W efekcie użytkownik $X_{i,j}$ nie jest k-najlepszym przyjacielem dla żadnej liczby całkowitej $k \geqslant j$, a więc nie jest użytkownikiem popularnym, co kończy rozwiązanie.

Zadanie **7**. Trójkąt ostrokątny ABC, którego wysokości przecinają się w punkcie H, jest wpisany w okrąg o. Punkt K leży na okręgu o po przeciwnej stronie prostej BC niż punkt A. Punkty L i M są symetryczne do punktu K odpowiednio względem prostych AB i BC. Okrąg opisany na trójkącie BLM przecina okrąg o w punkcie E różnym od B. Wykazać, że proste KH, EM oraz BC przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie



Rysunek 37

Wybierzmy na półprostej $AB^{\rightarrow}$ punkt F leżący poza odcinkiem AB (rys. 37). Wówczas

$$(1) \qquad \sphericalangle KBL + \sphericalangle KBM = 2\sphericalangle KBF + 2\sphericalangle KBC = 2\sphericalangle FBC = 2(180^\circ - \sphericalangle ABC).$$

A skoro trójkąt ABC jest ostrokątny, więc suma stojąca po lewej stronie zależności (1) jest większa od 180°. To oznacza, że punkty B i K leżą po tej samej stronie prostej LM. Ponadto z równości (1) otrzymujemy związek

$$(2) \qquad \sphericalangle LBM = 360^\circ - (\sphericalangle KBL + \sphericalangle KBM) = 2\sphericalangle ABC.$$

Punkty L i M są symetryczne do punktu K względem prostych przechodzących przez punkt B, skąd wynika, że $BL = BK = BM$. Zatem trójkąt BLM jest równoramienny, co wraz z zależnością (2) pozwala stwierdzić, że

$$(3) \qquad \sphericalangle BLM = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle LBM) = 90^\circ - \sphericalangle ABC.$$

Na mocy faktu, że trójkąt ABC jest ostrokątny, punkt M leży wewnątrz, a punkt L — na zewnątrz okręgu o. Wobec tego punkty L, B, M oraz E leżą na okręgu w wypisanej kolejności i związek (3) prowadzi do wniosku, że

$$\sphericalangle BEM = \sphericalangle BLM = 90^\circ - \sphericalangle ABC. \tag{4}$$

Niech prosta AH przecina okrąg o po raz drugi w punkcie D. Wtedy

$$\sphericalangle BED = \sphericalangle BAD = 90^\circ - \sphericalangle ABC.$$

To w połączeniu z zależnością (4) dowodzi, że

$$\sphericalangle BEM = \sphericalangle BED,$$

czyli punkty E, M i D leżą na jednej prostej. W konsekwencji teza zadania sprowadza się do wykazania, że proste KH, MD i BC przecinają się w jednym punkcie. W tym celu zauważmy, że

$$\sphericalangle DBC = \sphericalangle DAC = 90^\circ - \sphericalangle BCA = \sphericalangle HBC$$

i analogicznie $\sphericalangle DCB = \sphericalangle HCB$. Zatem punkty H i D są symetryczne względem prostej BC. Jednak również punkty M i K są symetryczne względem tej prostej. Zatem proste KH i MD są symetryczne względem prostej BC, skąd wynika, że punkt przecięcia prostych KH i BC leży także na prostej MD, a tego dowodziliśmy.

Zadanie **8**. Skończony ciąg nazwiemy *powtarzającym*, jeżeli można go uzyskać poprzez napisanie obok siebie pewnego ciągu co najmniej dwa razy. Przykładowo, ciągi a, b, a, b, a, b oraz a, b, c, a, b, c są powtarzające, ale ciągi a, b, a, b, a oraz a, a, b, b nie są. Dowieść, że w ciągu, w którym zamiana dowolnych dwóch sąsiednich (być może równych) wyrazów daje w wyniku ciąg powtarzający, wszystkie wyrazy są takie same.

Rozwiązanie

Okresem ciągu powtarzającego E nazwiemy najkrótszy taki ciąg F, że ciąg E można uzyskać poprzez napisanie obok siebie ciągu F co najmniej dwa razy. Liczbę wyrazów takiego ciągu F nazwiemy *długością okresu* ciągu powtarzającego E; jest ona właściwym dzielnikiem liczby wyrazów ciągu E. Wynosi 1 wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wyrazy ciągu E są równe, czyli gdy ciąg jest *stały.* Zauważmy, że jeżeli ciąg E jest powtarzający o okresie F, to ciąg powstały z dwukrotnego napisania obok siebie ciągu E można także otrzymać poprzez napisanie obok siebie ciągu F odpowiednią liczbę razy.

Załóżmy, wbrew tezie, że istnieje niestały ciąg $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, w którym zamiana dowolnych dwóch sąsiednich wyrazów daje ciąg powtarzający. Wtedy $n \geqslant 2$.

Załóżmy najpierw, że $n \leqslant 6$. Zamiana wyrazów a_1 i a_2 w ciągu A daje niestały ciąg powtarzający B. Długość okresu ciągu B jest więc właściwym dzielnikiem liczby n większym od 1. Wobec tego n jest liczbą złożoną, więc $n = 4$ lub $n = 6$. Dla $n = 4$ długość okresu ciągu B wynosi 2 i ciąg ten ma postać (x, y, x, y), gdzie $x \neq y$. Z kolei dla $n = 6$ długość okresu ciągu B albo jest równa 2 i $B = (x, y, x, y, x, y)$, gdzie $x \neq y$, albo wynosi 3 i $B = (x, y, z, x, y, z)$, przy czym nie wszystkie liczby x, y, z są równe. Zatem ciąg A jest jednym z ciągów postaci

$$(y, x, x, y), \quad (y, x, x, y, x, y) \quad \text{lub} \quad (y, x, z, x, y, z).$$

Pierwszy i drugi ciąg nie są powtarzające oraz nie zmieniają się w wyniku zamiany wyrazów drugiego i trzeciego. Natomiast dla trzeciego ciągu po zamianie wyrazów drugiego i trzeciego dostajemy ciąg (y, z, x, x, y, z). Jeżeli jest on powtarzający o długości okresu 2, to $y = x = y$ i $z = x = z$, jeżeli zaś jest powtarzający o długości okresu 3, to $y = x$, $z = y$ i $x = z$; w obu przypadkach uzyskujemy $x = y = z$, a więc ciąg A jest stały. Otrzymane sprzeczności wskazują, że $n \geqslant 7$.

Wykażemy teraz, że

$$(1) \qquad a_{k-1} = a_{k+1} \qquad \text{dla } k = 2, 3, 4, \ldots, n-1.$$

Ustalmy wskaźnik $k \in \{2, 3, 4, \ldots, n-1\}$. Niech B oraz C będą ciągami powstającymi z ciągu A po zamianie odpowiednio wyrazów a_{k-1} i a_k oraz wyrazów a_k i a_{k+1}. Na mocy założenia uczynionego w drugim akapicie rozwiązania oba te ciągi są powtarzające. Niech r i s oznaczają długości okresów odpowiednio ciągów B i C; liczby te są właściwymi dzielnikami liczby n większymi od 1.

Oznaczmy przez $(b_1, b_2, \ldots, b_{2n})$ i $(c_1, c_2, \ldots, c_{2n})$ ciągi powstające z dwukrotnego napisania obok siebie odpowiednio ciągów B i C. Wówczas

$$b_i = b_{i+n} = a_i \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, k-2, k+1, k+2, \ldots, n \text{ oraz}$$
$$c_i = c_{i+n} = a_i \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, k-2, k-1, k+2, \ldots, n,$$

skąd w szczególności dostajemy związki

$$(2) \qquad b_i = c_i \qquad \text{dla } i = k+2, k+3, \ldots, (k-3)+n, (k-2)+n.$$

Ponadto — w myśl ostatniego zdania pierwszego akapitu rozwiązania — spełnione są zależności

$$(3) \qquad b_{i+r} = b_i \quad \text{dla } 1 \leqslant i \leqslant 2n-r \qquad \text{oraz} \qquad c_{i+s} = c_i \quad \text{dla } 1 \leqslant i \leqslant 2n-s.$$

Przypuśćmy, że $r = s$. Liczba r jest większa od 1, a jako właściwy dzielnik liczby n nie przekracza $\frac{1}{2}n$. Stąd i z warunku $n > 4$ otrzymujemy nierówności

$$k+2 \leqslant k+r \leqslant k + \tfrac{1}{2}n < k + (n-2) = (k-2)+n,$$

które wraz z zależnościami (2) i (3) pozwalają stwierdzić, że

$$a_{k-1} = b_k = b_{k+r} = c_{k+s} = c_k = a_{k+1}.$$

Jeżeli natomiast $r \neq s$, to liczby r i s większe od 1 są różnymi właściwymi dzielnikami liczby n, zatem jedna z tych liczb nie przekracza $\frac{1}{2}n$, a druga nie przekracza $\frac{1}{3}n$. To w połączeniu z nierównością $n > 6$ dowodzi, że

$$k+r+s \leqslant k + \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{3}n = k + n - \tfrac{1}{6}n < k+n-1 = (k-1)+n,$$

czyli liczby $k+r$, $k+s$ oraz $k+r+s$ należą do przedziału $\langle k+2; (k-2)+n\rangle$. Wobec tego korzystając ze związków (2) i (3) uzyskujemy

$$a_{k-1} = b_k = b_{k+r} = c_{k+r} = c_{k+r+s} = b_{k+r+s} = b_{k+s} = c_{k+s} = c_k = a_{k+1}.$$

W obu przypadkach otrzymaliśmy postulowaną równość (1).

Udowodniliśmy w ten sposób, że ciąg A ma postać

$$(x, y, x, y, x, y, x, y, x, y, \ldots),$$

gdzie $x \neq y$ oraz ostatni wyraz jest równy y albo x w zależności od tego, czy liczba n jest parzysta, czy też nieparzysta. Zamieniając wyrazy drugi i trzeci dostajemy ciąg

$$D = (x, x, y, y, x, y, x, y, x, y, \ldots),$$

który zgodnie z przyjętym założeniem powinien być powtarzający. Jednak wtedy okres ciągu D rozpoczynałby się od dwóch wyrazów x, a cały ciąg D można by uzyskać w wyniku napisania tego okresu obok siebie co najmniej dwa razy. W tej sytuacji w ciągu D musiałaby wystąpić — oprócz dwóch początkowych wyrazów — co najmniej jeszcze jedna para sąsiednich wyrazów równych x, a tak nie jest.

Otrzymana sprzeczność oznacza, że ciąg A nie ma żądanych własności. Rozwiązanie jest więc zakończone.

XXII Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich

Zadanie **1**. Liczby rzeczywiste x_1, x_2, ..., x_{2011} spełniają warunki

$$(1) \qquad x_1+x_2=2y_1, \quad x_2+x_3=2y_2, \quad \ldots, \quad x_{2011}+x_1=2y_{2011},$$

gdzie ciąg $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{2011}$ jest permutacją ciągu $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{2011}$. Udowodnić, że $x_1=x_2=\ldots=x_{2011}$.

Rozwiązanie

Podnosząc równości (1) do kwadratu i dodając stronami otrzymujemy

$$(2) \qquad (x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+\ldots+(x_{2011}+x_1)^2=4(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_{2011}^2).$$

Lewa strona zależności (2) wynosi

$$2(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{2011}^2)+2(x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{2011}x_1).$$

Ponieważ zaś ciąg $y_1, y_2, \ldots, y_{2011}$ jest permutacją ciągu $x_1, x_2, \ldots, x_{2011}$, więc prawa strona związku (2) jest równa

$$4(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{2011}^2).$$

Wobec tego równość (2) przybiera postać

$$2(x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{2011}x_1)=2(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{2011}^2),$$

czyli

$$(3) \qquad 0=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+\ldots+(x_{2011}-x_1)^2.$$

Z zależności (3) wynika, że wszystkie liczby stojące w nawiasach po prawej jej stronie muszą być równe zeru. A to pociąga za sobą tezę zadania.

Zadanie **2**. Dana jest funkcja f określona na zbiorze wszystkich liczb całkowitych i przyjmująca wartości całkowite. Ponadto dla dowolnych liczb całkowitych x i y prawdziwa jest równość

$$f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x)). \tag{1}$$

Wykazać, że f jest funkcją ograniczoną.

Rozwiązanie

Funkcja zerowa jest ograniczona. Możemy więc przyjąć, że istnieje liczba całkowita a, dla której liczba $b = f(a)$ jest różna od zera.

Podstawiając $y = f(x)$ w zależności (1) otrzymujemy

$$f(0) = 0; \tag{2}$$

przyjmując z kolei $x = 0$ stwierdzamy na mocy związku (2), że

$$f(-y) = f(y) \qquad \text{dla dowolnego } y. \tag{3}$$

Podstawmy teraz $y = 0$ w warunku (1). W oparciu o zależność (2) uzyskujemy $f(f(x)) = -f(f(x))$, czyli

$$f(f(x)) = 0 \qquad \text{dla każdego } x. \tag{4}$$

Niech wreszcie $x = a$ oraz $y = -t$, gdzie t jest dowolną liczbą rzeczywistą; równość (1) dla tych wartości x i y — w myśl związków (2), (4) i (3) — prowadzi do wniosku, że

$$f(b+t) = f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x)) = f(y) = f(-t) = f(t).$$

W efekcie f jest funkcją okresową o okresie długości b. Jest ona jednak określona na zbiorze liczb całkowitych, zatem dla dowolnej liczby całkowitej x wartość $f(x)$ należy do skończonego zbioru $\{f(0), f(1), f(2), \ldots, f(|b|-1)\}$. To dowodzi, że funkcja f jest ograniczona.

Zadanie **3**. Dany jest ciąg dodatnich liczb całkowitych $a_1, a_2, a_3, \ldots$, w którym dla $n = 2, 3, 4, \ldots$ wyraz a_{n+1} jest ostatnią cyfrą zapisu dziesiętnego liczby $a_n^n + a_{n-1}$. Rozstrzygnąć, czy z tych założeń wynika, że dla pewnej dodatniej liczby całkowitej m ciąg $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ jest okresowy.

Rozwiązanie

Na początku zauważmy, że wszystkie wyrazy danego ciągu, z wyjątkiem być może dwóch pierwszych, są elementami zbioru $S = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Rozważmy nieskończony ciąg par postaci (a_{3+4j}, a_{4+4j}) dla $j = 0, 1, 2, \ldots$. Jak stwierdziliśmy wyżej, są to pary elementów zbioru S. Ponieważ istnieje tylko 100 różnych takich par, więc dla pewnych liczb całkowitych $j_2 > j_1 \geq 0$ pary (a_{3+4j_1}, a_{4+4j_1}) oraz (a_{3+4j_2}, a_{4+4j_2}) muszą być jednakowe. Określmy $m = 3+4j_1$. Wykażemy, że ciąg $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ jest okresowy o okresie długości $d = 4(j_2 - j_1)$. Należy zatem udowodnić, że

$$a_{m+n+d} = a_{m+n} \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

W tym celu zastosujemy indukcję.

Dla $n = 0, 1$ prawdziwość wzoru (1) wynika wprost z określenia liczb j_1, j_2, m i d, gdyż $a_{m+d} = a_{3+4j_2} = a_{3+4j_1} = a_m$ i $a_{m+1+d} = a_{4+4j_2} + a_{4+4j_1} = a_{m+1}$.

Przypuśćmy z kolei, że wzór (1) jest słuszny dla $n = k - 1$ oraz dla $n = k$, gdzie $k \geq 1$ jest liczbą całkowitą; udowodnimy jego słuszność dla $n = k + 1$.

Niech $x = a_{m+k+d} = a_{m+k}$ oraz $y = a_{m+k-1+d} = a_{m+k-1}$. Wówczas postulowana równość $a_{m+k+1+d} = a_{m+k+1}$ jest równoważna temu, że liczby

$$a_{m+k+d}^{m+k+d} + a_{m+k-1+d} = x^{m+k+d} + y \qquad \text{i} \qquad a_{m+k}^{m+k} + a_{m+k-1} = x^{m+k} + y$$

mają tę samą ostatnią cyfrę, co jest równoznaczne ze stwierdzeniem, że ich różnica $(x^{m+k+d} + y) - (x^{m+k} + y) = x^{m+k}(x^d - 1)$ jest podzielna przez 10.

Liczba d jest podzielna przez 4 oraz $m + k \geq 4$, co pozwala napisać

$$x^{m+k}(x^d - 1) = x^{m+k-1} \cdot x(x^4 - 1)(x^{d-4} + x^{d-8} + \ldots + x^4 + 1).$$

Aby teraz wykazać podzielność powyższej liczby przez 10, wystarczy sprawdzić, że dla dowolnej liczby całkowitej x liczba $x(x^4 - 1) = x^5 - x$ jest podzielna przez 2 oraz przez 5. Pierwsza z tych podzielności wynika z faktu, że liczby x^5 i x są obie parzyste albo obie nieparzyste, druga zaś wynika z tożsamości

$$\begin{aligned} x^5 - x &= x(x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)x(x + 1)[(x - 2)(x + 2) + 5] = \\ &= (x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2) + 5(x - 1)x(x + 1), \end{aligned}$$

gdyż pierwszy składnik prawej strony zawiera czynnik podzielny przez 5.

To kończy dowód indukcyjny związku (1) i rozwiązanie zadania.

Odpowiedź: Tak.

Zadanie **4**. Nieujemne liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunek

$$a+b+c+d=4.$$

Udowodnić, że

$$\frac{a}{a^3+8}+\frac{b}{b^3+8}+\frac{c}{c^3+8}+\frac{d}{d^3+8}\leqslant\frac{4}{9}.$$

Rozwiązanie

Wykażemy, że dla dowolnej nieujemnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność

$$\frac{x}{x^3+8}\leqslant\frac{2}{27}x+\frac{1}{27}. \tag{1}$$

Istotnie, przekształcając równoważnie zależność (1) otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned}
&27x\leqslant(x^3+8)(2x+1),\\
&0\leqslant(x^3+8)(2x+1)-27x=2x^4+x^3-11x+8,\\
&0\leqslant(x-1)(2x^3+3x^2+3x-8)=(x-1)^2(2x^2+5x+8),
\end{aligned}$$

a w ostatnim wierszu oba czynniki po prawej stronie są liczbami nieujemnymi.

Stosując teraz nierówność (1) kolejno dla $x=a,b,c,d$, dodając stronami i wykorzystując związek $a+b+c+d=4$ otrzymujemy

$$\frac{a}{a^3+8}+\frac{b}{b^3+8}+\frac{c}{c^3+8}+\frac{d}{d^3+8}\leqslant\frac{2}{27}(a+b+c+d)+4\cdot\frac{1}{27}=\frac{8}{27}+\frac{4}{27}=\frac{4}{9},$$

co kończy rozwiązanie.

Zadanie **5**. Funkcja f jest określona na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmuje wartości rzeczywiste, a ponadto spełnia równość

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1$$

dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznaczyć $f(0)$.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że $f(f(0)) = f(f(1)) = 1$.

Oznaczmy $a = f(0)$ i $b = f(1)$. Wówczas

$$b^2 - b + 1 = f(f(b)) = f(f(f(1))) = f(1) = b.$$

Jedynym rozwiązaniem równania $b^2 - b + 1 = b$ jest liczba $b = 1$. Wobec tego $f(1) = 1$. Zatem

$$a^2 - a + 1 = f(f(a)) = f(f(f(0))) = f(1) = 1,$$

czyli $a^2 - a = 0$, co daje dwie możliwe wartości: $a = 0$ oraz $a = 1$. Jednak przypadek $a = 0$ prowadzi do wniosku, że $f(0) = 0$ i $f(f(0)) = f(0) = 0$, wbrew równości $f(f(0)) = 1$. W takim razie $f(0) = 1$.

Odpowiedź: Szukana wartość wynosi $f(0) = 1$.

Zadanie **6**. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Dowieść, że liczba prostych na płaszczyźnie, przechodzących przez początek układu współrzędnych oraz przez dokładnie jeden inny punkt o obu współrzędnych ze zbioru $\{0,1,2,\ldots,n\}$, wynosi co najmniej $\frac{1}{4}n^2$.

Rozwiązanie

Niech A oznacza zbiór złożony z punktów o obu współrzędnych należących do zbioru $\{1,2,3,\ldots,n\}$ oraz niech B będzie zbiorem złożonym z punktów, których obie współrzędne są całkowite, dodatnie i nie większe niż $\frac{1}{2}n$.

Wykażemy, że jeżeli prosta ℓ przechodzi przez punkt $(0,0)$ oraz przez dokładnie m punktów zbioru A, przy czym $m \geqslant 2$, to przechodzi ona też przez pewien punkt zbioru B. Istotnie, niech (x,y) będzie punktem prostej ℓ o najmniejszej odciętej spośród punktów o współrzędnych całkowitych i dodatnich. Wówczas wszystkimi punktami prostej ℓ o obu współrzędnych całkowitych są punkty postaci (kx,ky), gdzie k jest liczbą całkowitą. Ponadto punkty zbioru A otrzymujemy dokładnie dla $k=1,2,\ldots,m$. Z nierówności $m \geqslant 2$ wynika, że punkt o współrzędnych $(2x,2y)$ należy do zbioru A, skąd $2x \leqslant n$ i $2y \leqslant n$, zatem $(x,y) \in B$.

Ponieważ $(mx,my) \in A$, więc $mx \leqslant n$ i $my \leqslant n$. Wobec tego wszystkie współrzędne punktów $(\frac{m-1}{2}\cdot x, \frac{m-1}{2}\cdot y)$ oraz $(\frac{m}{2}\cdot x, \frac{m}{2}\cdot y)$ są nie większe niż $\frac{1}{2}n$. Jeżeli więc m jest liczbą nieparzystą, to $(\frac{m-1}{2}\cdot x, \frac{m-1}{2}\cdot y) \in B$, a jeżeli m jest liczbą parzystą, to $(\frac{m}{2}\cdot x, \frac{m}{2}\cdot y) \in B$. Stąd wniosek, że prosta ℓ przechodzi przez co najmniej $\frac{m-1}{2}$ punktów zbioru B. Innymi słowy, jeżeli prosta ℓ przechodzi przez dokładnie p punktów zbioru B, to przechodzi ona przez co najwyżej $2p+1$ punktów zbioru A.

Dla $p \geqslant 1$ prawdziwa jest zależność $2p+1 \leqslant 3p$. Wobec tego dla $p \geqslant 1$ prosta, przechodząca przez początek układu oraz dokładnie p punktów zbioru B, przechodzi przez co najmniej 2 i co najwyżej $3p$ punktów zbioru A.

Podzielmy na dwie grupy wszystkie proste, przechodzące przez początek układu oraz przez co najmniej jeden punkt zbioru A. Do pierwszej grupy zaliczmy proste przechodzące przez dokładnie jeden punkt zbioru A, a do drugiej grupy — pozostałe proste. Wtedy dowolna prosta z drugiej grupy przechodzi przez pewien punkt zbioru B. Rodzina wszystkich prostych drugiej grupy pokrywa więc co najwyżej trzy razy więcej punktów zbioru A niż zbioru B. Jednak zbiór B składa się z co najwyżej $\frac{1}{4}n^2$ punktów, czyli co najwyżej $\frac{3}{4}n^2$ punktów zbioru A leży na pewnej prostej z drugiej grupy. W takim razie co najmniej $\frac{1}{4}n^2$ punktów zbioru A leży na pewnej prostej z pierwszej grupy. W efekcie grupa ta liczy co najmniej $\frac{1}{4}n^2$ prostych.

Żadna prosta z pierwszej grupy nie jest pozioma ani pionowa, więc nie przechodzi przez punkty o jednej ze współrzędnych równej zeru i drugiej różnej od zera. To wraz z określeniem pierwszej grupy dowodzi, że dowolna należąca do niej prosta spełnia warunki zadania. Rozwiązanie jest więc zakończone.

Zadanie **7**. Niech T oznacza 15-elementowy zbiór liczb postaci $10a+b$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi, dla których $1 \leqslant a < b \leqslant 6$. Niech S będzie takim podzbiorem zbioru T, że w zapisach dziesiętnych elementów zbioru S występuje wszystkie sześć cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, ale wśród dowolnych trzech elementów przynajmniej jedna z tych cyfr się nie pojawia. Wyznaczyć największą możliwą liczbę elementów zbioru S.

Rozwiązanie

Zbiór T można rozbić na 5 zbiorów 3-elementowych:

$$(1) \qquad \{12,34,56\}, \quad \{13,25,46\}, \quad \{14,26,35\}, \quad \{15,24,36\}, \quad \{16,23,45\}.$$

W dowolnym z tych zbiorów występują wszystkie cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6. Wobec tego do zbioru S mogą należeć co najwyżej dwie liczby z każdego ze zbiorów (1) i w konsekwencji zbiór S ma nie więcej niż 10 elementów.

Przypuśćmy, że zbiór S ma dokładnie 10 elementów. Wykażemy, że wówczas dowolna para elementów zbioru $T \setminus S$ ma wspólną cyfrę. Gdyby bowiem pewne dwie liczby należące do zbioru $T \setminus S$ zawierały cztery różne cyfry, to nie tracąc ogólności rozumowania moglibyśmy przyjąć, że tymi dwiema liczbami są 12 i 34. Wtedy zbiór S zawierałby co najwyżej jeden element pierwszego ze zbiorów (1) i co najwyżej dwa elementy z każdego z pozostałych czterech zbiorów, więc miałby on łącznie co najwyżej 9 elementów.

Istotnie więc dowolne dwie liczby z 5-elementowego zbioru $T \setminus S$ mają wspólną cyfrę. Wybierzmy dwie liczby z tego zbioru; bez ograniczenia ogólności możemy przyjąć, iż są nimi 12 i 13. Jedyną liczbą ze zbioru T, różną od tych dwóch liczb i mającą wspólną cyfrę z każdą z nich, jest liczba 23. Stąd wynika, że zbiór $T \setminus S$ ma co najwyżej 3 elementy, wbrew temu, że do zbioru S należy dokładnie 10 liczb. Uzyskaliśmy sprzeczność, która dowodzi, że liczba elementów zbioru S nie może przekraczać 9.

Pozostaje podać przykład 9-elementowego zbioru S. W tym celu weźmy pod uwagę zbiór $S = \{12,13,14,15,16,23,24,25,26\}$. Jest jasne, że wśród wszystkich elementów tego zbioru pojawia się wszystkie 6 cyfr. Jednocześnie w zapisie dowolnego elementu występuje tylko jedna cyfra ze zbioru $\{3,4,5,6\}$ i w związku z tym w dowolnej trójce elementów nie pojawia się co najmniej jedna z tych czterech cyfr. Zbiór S spełnia więc warunki zadania.

Odpowiedź: Szukana największa możliwa liczba elementów wynosi 9.

Zadanie **8**. Dane są trzy szkoły: A, B oraz C. Do każdej z tych szkół uczęszcza przynajmniej jeden uczeń. Wśród dowolnych trzech uczniów, po jednym z każdej szkoły, pewnych dwóch uczniów się zna oraz pewnych dwóch się nie zna. Udowodnić, że prawdziwe jest przynajmniej jedno z następujących zdań:

- pewien uczeń ze szkoły A zna wszystkich uczniów szkoły B;
- pewien uczeń ze szkoły B zna wszystkich uczniów szkoły C;
- pewien uczeń ze szkoły C zna wszystkich uczniów szkoły A.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że wszystkie te trzy zdania są fałszywe.

Spośród wszystkich uczniów szkoły A wybierzmy takiego ucznia a, który zna możliwie największą liczbę uczniów szkoły B. Ponieważ pierwsze zdanie jest nieprawdziwe, więc w szkole B istnieje uczeń b, którego uczeń a nie zna. Podobnie w szkole C istnieje uczeń c, którego uczeń b nie zna, a w szkole A istnieje uczeń a', którego uczeń c nie zna.

W tej sytuacji uczniowie a i b się nie znają oraz uczniowie b i c się nie znają. Wobec tego na mocy warunków zadania uczniowie a i c muszą się znać. Ponadto uczniowie a' i c się nie znają oraz uczniowie c i b się nie znają. W efekcie uczeń a' zna ucznia b, skąd $a' \neq a$, gdyż uczniowie a i b się nie znają. Co więcej, w szkole B istnieje uczeń b', który jest znajomym ucznia a, ale nie jest znajomym ucznia a'. W przeciwnym bowiem razie uczeń a' miałby w szkole B więcej znajomych niż uczeń a (oprócz wszystkich znajomych ucznia a znałby jeszcze ucznia b), w sprzeczności z wyborem ucznia a.

Zatem w trójce a, b', c uczniowie a i b' się znają oraz uczniowie a i c się znają. To oznacza, że uczniowie b' i c nie mogą się znać. W takim razie w trójce a', b', c żadna para uczniów się nie zna, wbrew założeniom zadania.

Uzyskana sprzeczność kończy rozwiązanie.

Zadanie **9**. Prostokąt o wymiarach $m \times n$ podzielony jest na kwadraty jednostkowe. Kolorowanie tych kwadratów na biało i czarno nazwiemy *poprawnym*, jeżeli spełnia ono następujące warunki:

- wszystkie kwadraty przylegające do brzegu prostokąta są czarne;
- wśród każdych czterech kwadratów tworzących kwadrat 2×2 jest biały i jest czarny ;
- żadne cztery kwadraty tworzące kwadrat 2×2 nie są pomalowane w taki sposób, że dwa kwadraty stykające się tylko rogiem mają ten sam kolor, a pozostałe dwa mają inny kolor.

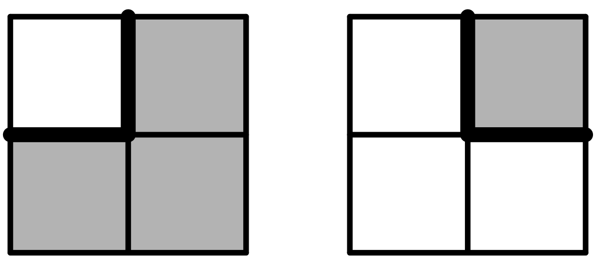
Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych $m, n \geqslant 3$, dla których prostokąt $m \times n$ można pokolorować poprawnie.

Rozwiązanie

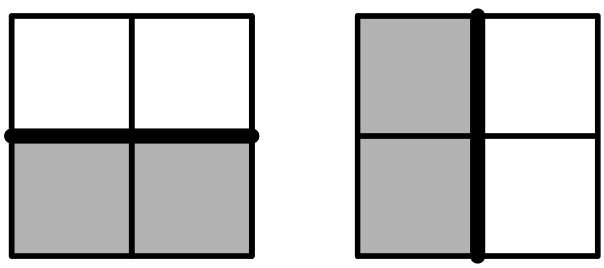
Przypuśćmy, że prostokąt $m \times n$ można pokolorować poprawnie.

Nazwijmy *odcinkiem oddzielającym* odcinek będący wspólnym bokiem dwóch kwadratów jednostkowych o różnych kolorach. W dowolnej kolumnie liczba poziomych odcinków oddzielających jest parzysta — jest to bowiem liczba zmian kolorów podczas przechodzenia wzdłuż pionowej linii od jednego brzegu kolumny do drugiego, a oba brzegowe kwadraty w kolumnie są czarne. Analogicznie liczba pionowych odcinków oddzielających w dowolnym wierszu jest parzysta. Każdy poziomy odcinek oddzielający leży w dokładnie jednej kolumnie, a każdy pionowy leży w dokładnie jednym wierszu. Wobec tego liczba wszystkich odcinków oddzielających jest parzysta.

Z drugiej strony, na podstawie warunków zadania dowolny kwadrat 2×2 utworzony z kwadratów jednostkowych albo zawiera trzy pola jednego koloru i jedno pole drugiego koloru (rys. 38), albo zawiera dwa pola jednego koloru mające wspólny bok oraz dwa pola drugiego koloru mające wspólny bok (rys. 39). W obu przypadkach istnieją dokładnie dwa odcinki oddzielające położone w tym kwadracie i nie zawarte w jego brzegu (o takim odcinku powiemy, że jest *dobrze umiejscowiony* względem danego kwadratu).

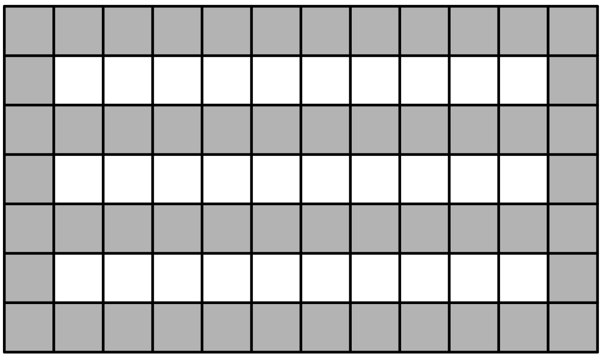


Rysunek 38



Rysunek 39

Wszystkie kwadraty jednostkowe przyległe do brzegu prostokąta $m \times n$ są czarne, zatem dowolny odcinek oddzielający ma oba końce we wnętrzu prostokąta. Odcinek taki jest więc dobrze umiejscowiony względem dokładnie dwóch kwadratów 2×2. Stąd i z konkluzji poprzedniego akapitu wnioskujemy, że liczba odcinków oddzielających jest równa liczbie wszystkich kwadratów 2×2 utworzonych z kwadratów jednostkowych. Ta ostatnia liczba wynosi $(m-1)(n-1)$, a jednocześnie — jak stwierdziliśmy wcześniej — musi być liczbą parzystą. W efekcie przynajmniej jedna z liczb m, n jest nieparzysta. Pozostaje jeszcze udowodnić, że jeżeli co najmniej jedna z liczb m, n jest nieparzysta, to prostokąt $m \times n$ można pokolorować poprawnie. Przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że liczba wierszy m jest nieparzysta. Pomalujmy dwie skrajne kolumny na czarno, a następnie wszystkie wiersze położonego między tymi kolumnami prostokąta $m \times (n-2)$ pomalujmy na przemian na czarno i biało tak, aby oba skrajne wiersze były czarne (rys. 40). Wówczas każdy kwadrat 2×2 przyległy do lewego lub prawego brzegu prostokąta ma trzy pola czarne i jedno białe, a każdy inny kwadrat 2×2 ma jeden wiersz biały i jeden czarny. Kolorowanie jest więc poprawne.



Rysunek 40

Odpowiedź: Para liczb całkowitych $m, n \geqslant 3$ spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jedna z tych liczb jest nieparzysta.

Zadanie **10**. Dwie osoby grają, wykonując ruchy na przemian, w następującą grę. Na początku dana jest liczba 2011^{2011}. Każdy ruch polega albo na odjęciu liczby ze zbioru $\{1,2,3,\ldots,2010\}$ od bieżącej liczby, albo też na podzieleniu bieżącej liczby przez 2011 i zaokrągleniu ilorazu w dół do najbliższej liczby całkowitej. Gracz, który jako pierwszy otrzyma liczbę niedodatnią, wygrywa. Rozstrzygnąć, który z graczy — rozpoczynający czy jego przeciwnik — ma strategię wygrywającą.

Rozwiązanie

Z każdą dodatnią liczbą całkowitą związany jest wykładnik, z jakim liczba pierwsza 2011 wchodzi do rozkładu danej liczby na czynniki pierwsze. Wykładnik ten jest nieujemną liczbą całkowitą. Oznaczmy przez A zbiór tych dodatnich liczb całkowitych, dla których ów wykładnik jest parzysty, a przez B zbiór tych dodatnich liczb całkowitych, dla których rozważany wykładnik jest nieparzysty.

Jeżeli bieżąca liczba należy do zbioru B, to dowolny ruch prowadzi do liczby będącej elementem zbioru A. Rzeczywiście, bieżąca liczba jest dodatnia i podzielna przez 2011, więc odjęcie od niej elementu zbioru $\{1,2,3,\ldots,2010\}$ daje w wyniku liczbę dodatnią niepodzielną przez 2011, a więc należącą do zbioru A. Z kolei podzielenie bieżącej liczby przez 2011 zmniejsza o 1 wykładnik, z jakim ta liczba pierwsza występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze, czyli zmienia wykładnik z nieparzystego na parzysty i również daje liczbę dodatnią będącą elementem zbioru A.

Udowodnimy teraz, że dla dowolnej liczby n ze zbioru A istnieje ruch dający w efekcie liczbę niedodatnią lub liczbę będącą elementem zbioru B. Pierwsza możliwość ma oczywiście miejsce dla liczb $n < 2011$. Natomiast dla liczby $n > 2011$ mogą wystąpić dwa przypadki: albo liczba n jest podzielna przez 2011, albo też nie jest podzielna. W pierwszym przypadku wynikiem podzielenia liczby n przez 2011 jest liczba, której rozkład na czynniki pierwsze zawiera czynnik 2011 z wykładnikiem o 1 mniejszym niż parzysty wykładnik w rozkładzie liczby n — a więc iloraz jest elementem zbioru B. Przypuśćmy z kolei, że liczba n daje przy dzieleniu przez 2011 resztę $r \in \{1,2,3,\ldots,2010\}$. Niech k będzie wykładnikiem, z jakim liczba pierwsza 2011 wchodzi do rozkładu liczby $n-r$ na czynniki pierwsze; rzecz jasna $k \geqslant 1$. Wówczas liczba $n-r$ jest podzielna przez 2011^k i nie jest podzielna przez 2011^{k+1}, a ponadto wynikiem podzielenia liczby n przez 2011 i zaokrąglenia ilorazu w dół jest liczba podzielna przez 2011^{k-1} i niepodzielna przez 2011^k. Jeżeli zatem k jest liczbą parzystą, to wynik podzielenia liczby n przez 2011 i zaokrąglenia w dół jest elementem zbioru B. Jeżeli natomiast k jest liczbą nieparzystą, to wynik odjęcia liczby r od liczby n jest elementem zbioru B. To dowodzi stwierdzenia zawartego w pierwszym zdaniu akapitu.

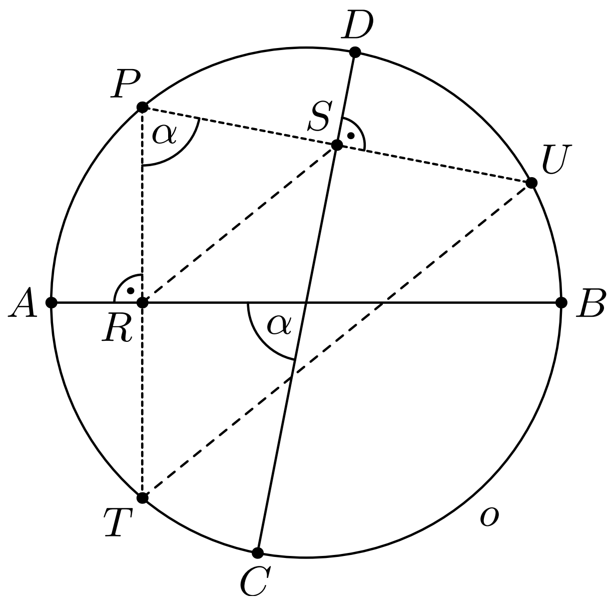
Początkowa liczba 2011^{2011} należy do zbioru B. Każdy ruch pierwszego gracza prowadzi więc do elementu zbioru A, a drugi gracz może z otrzymanej liczby uzyskać element zbioru B. Strategię tę drugi gracz może kontynuować, za każdym razem wykonując taki ruch, który liczbę ze zbioru A powstałą po ruchu pierwszego gracza przeprowadza albo — jeśli jest to możliwe — w liczbę niedodatnią, albo też w element zbioru B. W ten sposób za każdym razem pierwszy gracz będzie zmuszony wykonać ruch dający w wyniku element zbioru A, czyli nigdy nie otrzyma liczby niedodatniej. Jednak gra musi się zakończyć, gdyż po każdym ruchu bieżąca liczba maleje co najmniej o 1. Wobec tego opisana strategia prowadzi do zwycięstwa drugiego gracza.

Odpowiedź: Strategię wygrywającą ma przeciwnik rozpoczynającego grę.

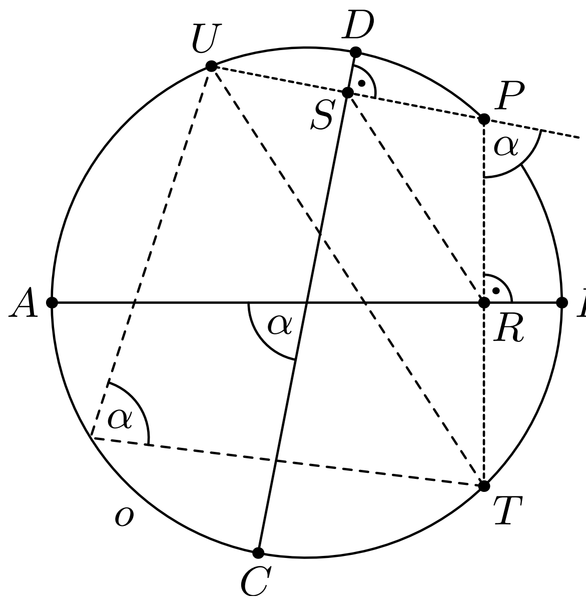
Zadanie **11**. Odcinki AB i CD są średnicami okręgu o. Dla dowolnego punktu P leżącego na okręgu o niech R oraz S będą rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na proste AB oraz CD. Wykazać, że długość odcinka RS nie zależy od wyboru punktu P.

Rozwiązanie

Odbijmy punkt P symetrycznie względem prostych AB i CD, uzyskując odpowied-



Rysunek 41



Rysunek 42

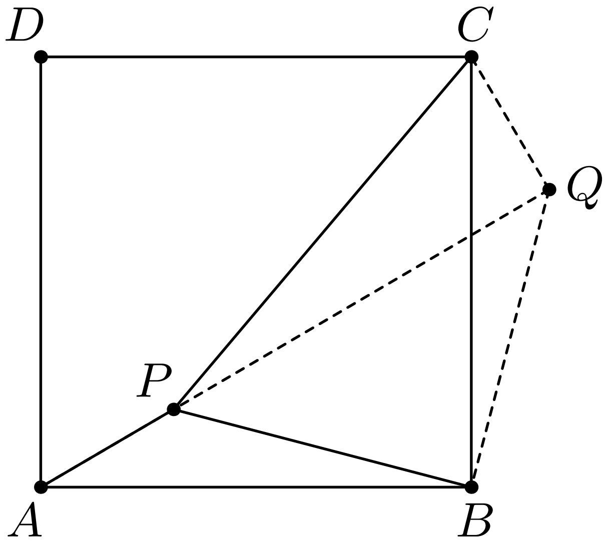
nio punkty T i U (rys. 41 i 42). Obie te proste przechodzą przez środek okręgu o, więc punkty T i U leżą na tym okręgu. Ponadto z twierdzenia Talesa wynika równość $TU = 2RS$. Wystarczy zatem udowodnić, że długość cięciwy TU nie zależy od wyboru punktu P.

W tym celu oznaczmy przez α miarę jednego z kątów utworzonych przez proste AB i CD. Wtedy prostopadłe do nich proste PT i PU także przecinają się pod kątem α (jeżeli punkt P leży prostej AB, to „prostą PT" rozumiemy jako prostą styczną do okręgu o w punkcie P; analogiczną konwencję przyjmujemy, gdy punkt P leży na prostej CD). Wobec tego jeden z dwóch łuków TU okręgu o wyznacza kąt wpisany o mierze α. Stąd wniosek, że długość cięciwy TU nie zależy od wyboru punktu P, co kończy dowód.

Zadanie **12**. Punkt P leży wewnątrz kwadratu $ABCD$, przy czym stosunki długości $PA : PB : PC$ wynoszą $1 : 2 : 3$. Wyznaczyć miarę kąta BPA.

Rozwiązanie

Obrót o kąt prosty wokół punktu B przeprowadza punkt A na punkt C. Oznaczmy



Rysunek 43

przez Q obraz punktu P przy tym obrocie (rys. 43). Trójkąt BPA przechodzi pod wpływem rozważanego obrotu na trójkąt BQC, zatem boki QC i PA mają równe długości, a kąty BPA i BQC mają równe miary. Ponadto w trójkącie PBQ kąt przy wierzchołku B jest prosty oraz $BP = BQ$; jest to więc trójkąt prostokątny równoramienny, skąd na mocy twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $PQ = \sqrt{2}\,PB$. To wraz z zależnościami $QC = PA$, $PB = 2PA$ i $PC = 3PA$ prowadzi do wniosku, że

$$PQ^2 + QC^2 = 2PB^2 + PA^2 = 8PA^2 + PA^2 = 9PA^2 = PC^2.$$

Stosując twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa stwierdzamy teraz, że w trójkącie PQC kąt przy wierzchołku Q jest prosty. W rezultacie

$$\sphericalangle BPA = \sphericalangle BQC = \sphericalangle BQP + \sphericalangle PQC = 45^\circ + 90^\circ = \mathbf{135}^\circ.$$

Zadanie **13**. Punkt E leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$. Na bokach tego czworokąta budujemy, po zewnętrznej jego stronie, trójkąty ABF, BCG, CDH i DAI podobne odpowiednio do trójkątów DCE, ADE, BAE i CBE. Punkty P, Q, R i S są rzutami prostokątnymi punktu E odpowiednio na proste AB, BC, CD i DA. Dowieść, że jeżeli na czworokącie $PQRS$ można opisać okrąg, to

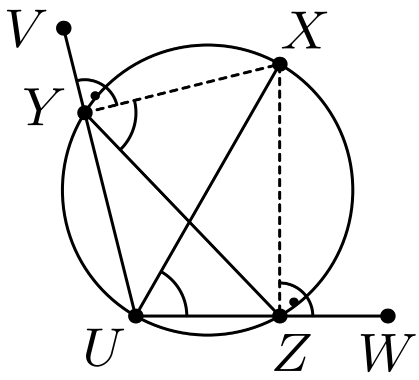
$$EF \cdot CD = EG \cdot DA = EH \cdot AB = EI \cdot BC.$$

Uwaga: Wyrażenie *trójkąt* XYZ *jest podobny do trójkąta* $X'Y'Z'$ rozumiemy tutaj jako istnienie podobieństwa płaszczyzny, które przeprowadza punkty X, Y i Z odpowiednio na punkty X', Y' i Z'.)

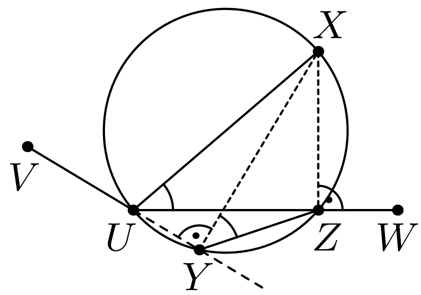
Rozwiązanie

Udowodnimy najpierw pomocnicze stwierdzenie. Niech U, V i W będą trzema punktami nie leżącymi na jednej prostej oraz niech X będzie punktem leżącym wewnątrz kąta wypukłego VUW. Oznaczmy przez Y i Z rzuty prostokątne punktu X odpowiednio na proste UV i UW (rys. 44–46). Wówczas prawdziwa jest równość

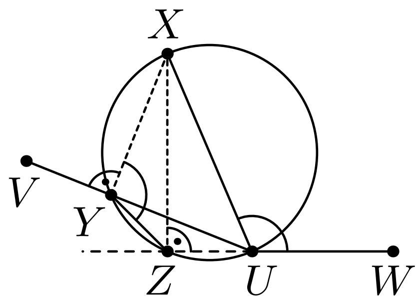
$$\sphericalangle XUW = \sphericalangle XYZ. \qquad (1)$$



Rysunek 44



Rysunek 45



Rysunek 46

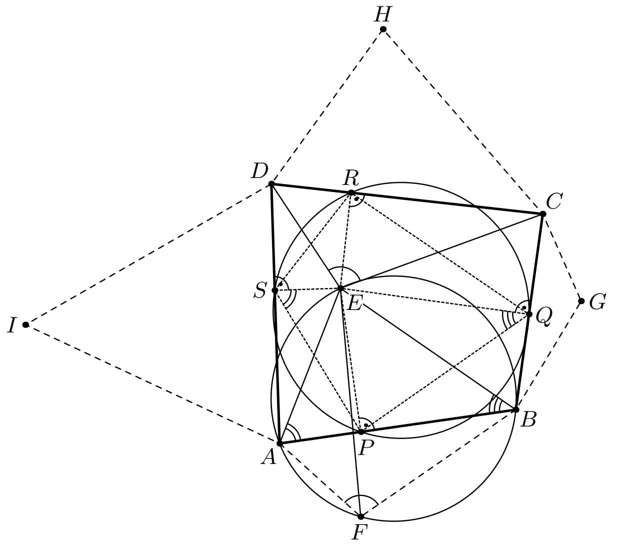
Dla dowodu zależności (1) zauważmy najpierw, że kąty XYU i XZU są proste, zatem punkty Y i Z leżą na okręgu o średnicy XU. Jeżeli więc punkt Z znajduje się wewnątrz półprostej $UW^{\rightarrow}$ (rys. 44 i 45), to punkty U i Y leżą po tej samej stronie prostej XZ i na mocy równości miar kątów wpisanych opartych na tym samym łuku okręgu otrzymujemy

$$\sphericalangle XUW = \sphericalangle XUZ = \sphericalangle XYZ.$$

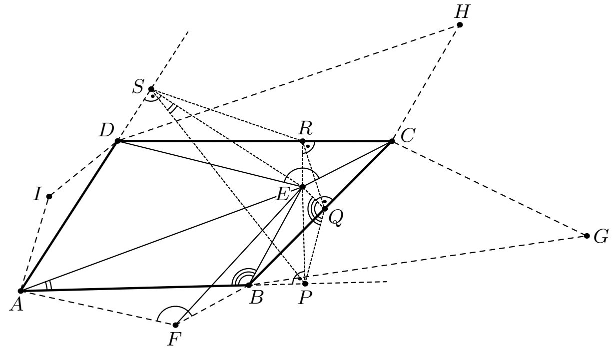
Jeżeli $Z = U$, to obie strony związku (1) są równe $90°$. Jeżeli wreszcie punkt Z znajduje się na zewnątrz kąta wypukłego VUW (rys. 46), to punkt Y leży na półprostej $UV^{\to}$ oraz punkty U i Y leżą po przeciwnych stronach prostej XZ. Wobec tego uzyskujemy

$$\sphericalangle XUW = 180^\circ - \sphericalangle XUZ = \sphericalangle XYZ.$$

Dowód równości (1) jest więc zakończony.



Rysunek 47



Rysunek 48

Przechodzimy do rozwiązania zadania. Stosując czterokrotnie wykazany przed chwilą fakt dostajemy zależności (rys. 47 i 48)

$$\sphericalangle EAB = \sphericalangle ESP, \quad \sphericalangle EBA = \sphericalangle EQP, \quad \sphericalangle ECD = \sphericalangle EQR, \quad \sphericalangle EDC = \sphericalangle ESR.$$

Suma lewych stron powyższych równości wynosi

$$(\sphericalangle EAB + \sphericalangle EBA) + (\sphericalangle ECD + \sphericalangle EDC) = (180^\circ - \sphericalangle AEB) + (180^\circ - \sphericalangle CED),$$

natomiast suma prawych stron wynosi

$$(\sphericalangle ESP + \sphericalangle ESR) + (\sphericalangle EQP + \sphericalangle EQR) = \sphericalangle PSR + \sphericalangle PQR = 180^\circ,$$

gdzie ostatnia równość jest konsekwencją założenia, że na czworokącie $PQRS$ można opisać okrąg. Porównując obie sumy otrzymujemy zatem związek

(2) $$\sphericalangle AEB + \sphericalangle CED = 180^\circ.$$

Korzystając z podobieństwa trójkątów DCE i ABF oraz z zależności (2) uzyskujemy

$$\sphericalangle AFB = \sphericalangle DEC = 180^\circ - \sphericalangle AEB,$$

a przy tym punkty E i F leżą po przeciwnych stronach prostej AB. To oznacza, że na czworokącie $AFBE$ można opisać okrąg. Zatem na mocy twierdzenia Ptolemeusza (zob. *LI Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego*, Warszawa 2001, Dodatek D, str. 112) dostajemy

(3) $$EF \cdot AB = AE \cdot BF + BE \cdot AF.$$

Ponadto podobieństwo trójkątów DCE i ABF implikuje istnienie dodatniej liczby rzeczywistej λ, dla której

$$CD = \lambda \cdot AB, \quad CE = \lambda \cdot BF \quad \text{oraz} \quad DE = \lambda \cdot AF.$$

W takim razie mnożąc obie strony związku (3) przez λ stwierdzamy, że

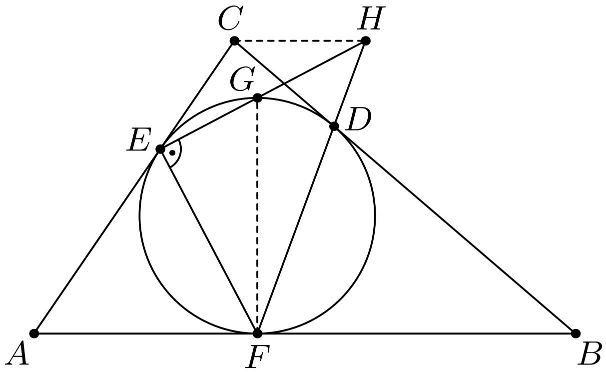
$$EF \cdot CD = AE \cdot CE + BE \cdot DE.$$

Analogiczne rozumowanie dowodzi, że iloczyny $EG \cdot DA$, $EH \cdot AB$ oraz $EI \cdot BC$ są równe $AE \cdot CE + BE \cdot DE$. To kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie **14**. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach D, E i F. Punkt G leży na tym okręgu, przy czym odcinek FG jest jego średnicą. Proste EG i FD przecinają się w punkcie H. Udowodnić, że proste CH i AB są równoległe.

Rozwiązanie

Trójkąt CED jest równoramienny, zatem stosując twierdzenie o kącie pomiędzy



Rysunek 49

styczną a cięciwą uzyskujemy (rys. 49)

(1) $$\sphericalangle EFD = \sphericalangle CED = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle DCE) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\sphericalangle DCE.$$

Zauważmy, że punkty D, G, E i F leżą w tej właśnie kolejności na okręgu wpisanym w trójkąt ABC. Ponieważ zaś kąt GEF jest prosty, a w myśl zależności (1) kąt EFD jest ostry, więc punkt H leży na półprostych $EG^{\rightarrow}$ i $FD^{\rightarrow}$ na zewnątrz trójkąta ABC. Wobec tego punkty C i H leżą po tej samej stronie prostej DE, a ponadto na podstawie równości (1) mamy

$$\sphericalangle DHE = \sphericalangle FHE = 90^\circ - \sphericalangle EFH = 90^\circ - \sphericalangle EFD = \tfrac{1}{2}\sphericalangle DCE.$$

Zatem okrąg o środku C, który przechodzi przez punkty E i D, przechodzi także przez punkt H. Trójkąt CEH jest więc równoramienny, skąd — znów na mocy twierdzenia o kącie pomiędzy styczną a cięciwą — dostajemy

$$\sphericalangle ACH = \sphericalangle ECH = 180^\circ - 2\sphericalangle GEC = 180^\circ - 2\sphericalangle GFE = 2(90^\circ - \sphericalangle GFE) =$$
$$= 2\sphericalangle EGF = 2\sphericalangle EFA = 180^\circ - \sphericalangle EAF = 180^\circ - \sphericalangle CAB.$$

Z uzyskanego związku $\sphericalangle ACH + \sphericalangle CAB = 180^\circ$ oraz z faktu, że punkt H leży wewnątrz kąta CAB, otrzymujemy tezę zadania.

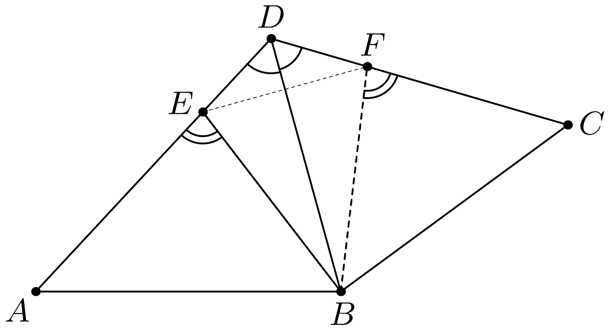
Zadanie **15**. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC$. Na boku AD wybrano taki punkt E, że

$$AE \cdot ED + BE^2 = CD \cdot AE. \tag{1}$$

Wykazać, że $\sphericalangle EBA = \sphericalangle DCB$.

Rozwiązanie

Niech F oznacza punkt symetryczny do punktu E względem prostej DB (rys. 50). Wówczas $ED = FD$ oraz $BE = BF$. Na mocy warunku $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC$ punkt F



Rysunek 50

leży na półprostej $DC^{\rightarrow}$. Ponadto z równości (1) dostajemy $AE \cdot ED < CD \cdot AE$, czyli $FD = ED < CD$. W takim razie punkt F leży wewnątrz odcinka DC.

Trójkąty DEB i DFB są symetryczne względem prostej DB, czyli są przystające. To oznacza, że

$$\sphericalangle AEB = \sphericalangle BFC. \tag{2}$$

Przekształcając z kolei związek (1) otrzymujemy

$$BE^2 = CD \cdot AE - AE \cdot ED = AE \cdot (CD - ED) = AE \cdot (CD - FD) = AE \cdot CF.$$

Wobec tego

$$\frac{BE}{AE} = \frac{CF}{BE} = \frac{CF}{BF},$$

co wraz z zależnością (2) dowodzi, że trójkąty BEA i CFB są podobne (cecha *bok-kąt-bok*). Zatem

$$\sphericalangle EBA = \sphericalangle FCB = \sphericalangle DCB.$$

Zadanie **16**. Dana jest liczba całkowita a. Określamy ciąg x_0, x_1, x_2, ... wzorami: $x_0 = a$, $x_1 = 3$ oraz

$$(1) \qquad x_n = 2x_{n-1} - 4x_{n-2} + 3 \qquad \text{dla } n = 2, 3, 4, \ldots .$$

Wyznaczyć, w zależności od a, największą liczbę całkowitą k, dla której istnieje taka liczba pierwsza p, że liczba $x_{2011} - 1$ jest podzielna przez p^k.

Rozwiązanie

Stosując dwukrotnie wzór (1) otrzymujemy

$$x_{n+3} - 1 = 2x_{n+2} - 4x_{n+1} + 2 = 2(2x_{n+1} - 4x_n + 3) - 4x_{n+1} + 2 =$$
$$= 4x_{n+1} - 8x_n + 6 - 4x_{n+1} + 2 = -8x_n + 8 = -8(x_n - 1),$$

dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Wobec tego ciąg

$$x_1 - 1, \quad x_4 - 1, \quad x_7 - 1, \quad x_{10} - 1, \quad \ldots$$

jest ciągiem geometrycznym o ilorazie -8 i pierwszym wyrazie $x_1 - 1 = 2$. Wynika stąd, że

$$x_{3k+1} - 1 = 2(-8)^k \qquad \text{dla } k = 0, 1, 2, \ldots$$

i w szczególności

$$x_{2011} - 1 = x_{3\cdot 670+1} = 2(-8)^{670} = 2 \cdot (2^3)^{670} = 2^{1+3\cdot 670} = 2^{2011}.$$

Pozostaje stwierdzić, że największym wykładnikiem, z jakim pewna liczba pierwsza wchodzi do rozkładu liczby 2^{2011} na czynniki pierwsze, jest oczywiście wykładnik 2011.

Odpowiedź: Dla każdej wartości a szukaną liczbą jest $k = 2011$.

Zadanie **17**. Wyznaczyć wszystkie takie dodatnie liczby całkowite d, że jeżeli liczba d jest dzielnikiem pewnej dodatniej liczby całkowitej n, to liczba d jest też dzielnikiem dowolnej liczby całkowitej otrzymanej z liczby n w wyniku przestawienia cyfr jej zapisu dziesiętnego.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że liczba d spełnia warunki zadania. Niech k będzie taką liczbą całkowitą, że $10^{k-1} > d$. Ciąg 10^k+1, 10^k+2, $\ldots$, 10^k+d składa się wówczas z d kolejnych liczb całkowitych, zatem jedna z tych liczb jest podzielna przez d. Niech tą liczbą będzie m. Zapis dziesiętny liczby m rozpoczyna się cyframi 1 i 0, a ponadto co najmniej jedna z dalszych cyfr jest różna od zera.

Przestawmy teraz cyfry liczby m umieszczając: na początku jedną z tych dalszych cyfr różnych od zera, następnie wszystkie pozostałe cyfry od trzeciej do ostatniej, a na końcu cyfry 1 i 0. Otrzymaną liczbę nazwijmy m_1; na mocy założeń jest to liczba podzielna przez d. Zamieniając miejscami dwie ostatnie cyfry liczby m_1 dostajemy liczbę m_2 podzielną przez d, która zamiast dwucyfrowej końcówki 10 ma końcówkę 01. Wobec tego różnica $m_1 - m_2$ wynosi 9, a jednocześnie jest ona podzielna przez d. Wynika stąd, że liczba d musi być równa 1, 3 albo 9.

Dla $d = 1, 3, 9$ liczba całkowita jest podzielna przez d wtedy i tylko wtedy, gdy suma cyfr jej zapisu dziesiętnego jest podzielna przez d. Ponadto dowolna liczba uzyskana w wyniku przestawienia cyfr ma taką samą sumę cyfr. To oznacza, że otrzymane trzy liczby d spełniają warunki zadania.

Odpowiedź: Wszystkimi liczbami o żądanej własności są $d = 1$, $d = 3$ i $d = 9$.

Zadanie **18**. Wyznaczyć wszystkie takie pary liczb pierwszych (p, q), że liczby $p^2 + q^3$ i $q^2 + p^3$ są kwadratami liczb całkowitych.

Rozwiązanie

Niech p i q będą liczbami pierwszymi, dla których istnieje dodatnia liczba całkowita k spełniająca równość $p^2 + q^3 = k^2$. Wówczas

$$q^3 = k^2 - p^2 = (k - p)(k + p).$$

Czynnik $k + p$ jest dodatni, zatem $k - p$ i $k + p$ są dodatnimi liczbami całkowitymi o iloczynie równym q^3, a ponadto $k - p < k + p$. Ponieważ q jest liczbą pierwszą, więc

$$\begin{cases} k - p = 1 \\ k + p = q^3 \end{cases} \qquad \text{lub} \qquad \begin{cases} k - p = q \\ k + p = q^2 \end{cases}$$

i w pierwszym przypadku mamy $2p = q^3 - 1$, a w drugim $2p = q^2 - q$.

Przypuśćmy, że $2p = q^3 - 1 = (q - 1)(q^2 + q + 1)$. Liczba $q^2 + q = q(q + 1)$ jest parzysta dla dowolnej całkowitej wartości q. Wobec tego czynnik $q^2 + q + 1$ jest liczbą nieparzystą większą od 1, która jest dzielnikiem liczby $2p$. Wynika stąd, że $q^2 + q + 1 = p$ oraz $q - 1 = 2$, czyli $q = 3$ i $p = 3^2 + 3 + 1 = 13$. Jednakże wtedy liczba $q^2 + p^3 = 3^2 + 13^3 = 2206$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Pozostaje zbadać przypadek $2p = q^2 - q = q(q - 1)$. W tej sytuacji mamy $q \neq 2$, gdyż dla $q = 2$ otrzymujemy wartość $p = 1$ nie będącą liczbą pierwszą. Zatem q jest nieparzystą liczbą pierwszą, która jest dzielnikiem liczby $2p$. W efekcie $q = p$ oraz $q - 1 = 2$, co daje $p = q = 3$. Otrzymana para spełnia warunki zadania: $p^2 + q^3 = q^2 + p^3 = 3^2 + 3^3 = 36 = 6^2$.

Odpowiedź: Jedyną parą o wymaganej własności jest $(p, q) = (3, 3)$.

Zadanie **19**. Dana jest liczba pierwsza $p \neq 3$. Udowodnić, że istnieje rosnący ciąg arytmetyczny złożony z p dodatnich liczb całkowitych, których iloczyn jest sześcianem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Rozpatrzymy dwa przypadki w zależności od reszty z dzielenia liczby p przez 3.

Jeżeli $p = 3k + 1$ dla pewnej liczby całkowitej $k \geqslant 1$, to warunki zadania spełnia ciąg arytmetyczny $(p!)^2$, $2(p!)^2$, $3(p!)^2$, $\ldots$, $p(p!)^2$. Iloczyn tych p wyrazów wynosi bowiem

$$(p!)^2 \cdot 2(p!)^2 \cdot 3(p!)^2 \cdot \ldots \cdot p(p!)^2 = p! \cdot [(p!)^2]^p = (p!)^{2p+1} = (p!)^{6k+3} = [(p!)^{2k+1}]^3.$$

Jeżeli zaś $p = 3k + 2$ dla pewnej liczby całkowitej $k \geqslant 0$, to wymaganą własność ma ciąg arytmetyczny $p!$, $2 \cdot p!$, $3 \cdot p!$, $\ldots$, $p \cdot p!$, gdyż

$$p! \cdot (2 \cdot p!) \cdot (3 \cdot p!) \cdot \ldots \cdot (p \cdot p!) = p! \cdot (p!)^p = (p!)^{p+1} = (p!)^{3k+3} = [(p!)^{k+1}]^3.$$

Zadanie **20**. Dodatnią liczbę całkowitą nazwiemy *zrównoważoną*, jeżeli ma ona parzystą liczbę różnych dzielników pierwszych. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych n, że wśród liczb n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ dokładnie dwie liczby są zrównoważone.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że teza zadania jest nieprawdziwa. Istnieje więc taka liczba całkowita $m \geqslant 1$, że w żadnym ciągu czterech kolejnych liczb całkowitych większych od m nie występują dokładnie dwie liczby zrównoważone.

Pomalujmy wszystkie liczby całkowite większe od m: liczby zrównoważone na biało, a pozostałe na czarno. Ciąg czterech kolejnych pomalowanych liczb nie może wówczas składać się z dwóch białych i dwóch czarnych liczb.

Wszystkie pomalowane liczby możemy podzielić na bloki białe i czarne, gdzie *blok* rozumiemy jako ciąg złożony z kolejnych liczb całkowitych, wszystkich o tym samym kolorze, i nie dający się rozszerzyć do dłuższego takiego ciągu. Blok może mieć długość 1, czyli składać się z pojedynczej liczby. Dwa bloki nazwiemy *sąsiednimi*, jeżeli największa liczba jednego z tych bloków jest mniejsza o 1 od najmniejszej liczby drugiego bloku.

Przyjrzyjmy się bliżej konfiguracji bloków białych i czarnych. Gdyby blok biały o długości co najmniej 2 sąsiadował z blokiem czarnym o długości co najmniej 2, to otrzymalibyśmy ciąg czterech kolejnych liczb całkowitych, w którym dwie liczby byłyby białe, a dwie pozostałe — czarne. To przeczy przyjętemu założeniu. Zatem jeden z dowolnej pary sąsiednich bloków musi mieć długość 1. Jeżeli również drugi blok ma długość 1, to dwie liczby występujące w tych blokach wraz z liczbą bezpośrednio mniejszą i liczbą bezpośrednio większą znów tworzą cztery kolejne liczby całkowite, wśród których dwie są białe oraz dwie są czarne — chyba że liczba bezpośrednio mniejsza w ogóle nie została pomalowana, a więc jest równa m.

Stąd wniosek, że bloki o długości 1 i bloki o większej długości występują na przemian (być może z wyjątkiem dwóch początkowych bloków, które mogą jednocześnie mieć długość 1). Wobec tego albo liczby białe większe od $m+2$ tworzą bloki o długości 1 sąsiadujące z obu stron z dłuższymi blokami czarnymi, albo też na odwrót — liczby czarne większe od $m+2$ tworzą bloki o długości 1 sąsiadujące z obu stron z dłuższymi blokami białymi.

Weźmy pod uwagę pierwszą możliwość. Niech $k \geqslant 1$ będzie taką liczbą całkowitą, że $3 \cdot 2^{k-1} - 3 > m$. Liczba $3 \cdot 2^k$ ma dokładnie dwa dzielniki pierwsze, czyli jest biała. Zatem liczby $3 \cdot 2^k - 2$, $3 \cdot 2^k - 1$, $3 \cdot 2^k + 1$ i $3 \cdot 2^k + 2$ są czarne. Podzielmy teraz liczby parzyste $3 \cdot 2^k - 2$ i $3 \cdot 2^k + 2$ przez 2, uzyskując liczby nieparzyste $3 \cdot 2^{k-1} - 1$ i $3 \cdot 2^{k-1} + 1$. Dzielenie przez 2 usunęło z rozkładów na czynniki pierwsze liczbę 2 i zachowało pozostałe czynniki pierwsze, więc z faktu, że liczby $3 \cdot 2^k - 2$ i $3 \cdot 2^k + 2$ były czarne, wynika, że liczby $3 \cdot 2^{k-1} - 1$ i $3 \cdot 2^{k-1} + 1$ są białe. W tej sytuacji $3 \cdot 2^{k-1} - 1$, $3 \cdot 2^{k-1}$ i $3 \cdot 2^{k-1} + 1$ są trzema kolejnymi liczbami całkowitymi większymi od $m + 2$, z których każda jest biała. Otrzymaliśmy więc sprzeczność.

W drugim przypadku przeprowadzamy podobne rozumowanie, zastępując jedynie we wszystkich miejscach liczby białe $3 \cdot 2^{k-1}$ i $3 \cdot 2^{k}$ odpowiednio liczbami czarnymi 2^{k-1} i 2^{k} oraz zamieniając role obu kolorów.

Uzyskane sprzeczności kończą rozwiązanie.